UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Maria Emília Francisco Montenegro Beirão

Relatório de Estágio

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Maria Emília Francisco Montenegro Beirão

Relatório de estágio orientado pela Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

2012

RESUMO

O presente estudo procura compreender como os alunos do 6.º ano de escolaridade desenvolvem o raciocínio matemático, quando apoiados e incentivados a usar critérios de avaliação de forma continuada. Com este objetivo, pretende-se dar resposta às seguintes questões de investigação: (i) Quando os alunos realizam tarefas que apelam ao raciocínio matemático procuram usar os critérios de avaliação de que dispõem? Como o fazem?, (ii) De que modo o uso dos critérios de avaliação orienta os alunos na progressão dos diferentes níveis do raciocínio matemático? e (iii) Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam quando raciocinam matematicamente? De que modo o uso de critérios de avaliação pode ajudar a ultrapassar estas dificuldades?.

A metodologia usada é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo. É feito o estudo de caso de três alunos que apresentam diferentes níveis de desempenho escolar à disciplina de Matemática, constituindo os mesmos um grupo de trabalho. Para a recolha de dados são utilizados como instrumentos: (i) observação de aulas acompanhada da escrita de um diário de bordo, (ii) entrevistas semiestruturadas aos três alunos selecionados, em suporte áudio, e (iii) recolha documental.

A análise de dados assume um caráter essencialmente descritivo e interpretativo. Os resultados obtidos evidenciam que os alunos utilizam os critérios de avaliação, seguindo a ordem das etapas definidas e para cada uma destas a ordem dos níveis, desde o mais elementar ao mais elaborado. O seu uso continuado promove a sua apropriação e ajuda os alunos a clarificar as diferentes etapas do processo de raciocínio matemático.

Entre as diferentes etapas definidas nos critérios de avaliação, os alunos estabelecem frequentemente relações entre objetos e formulam conjeturas com alguma destreza, baseando-se nas suas observações. O testar casos possibilita-lhes uma maior flexibilidade entre conceitos, assim como interações verbais entre os pares. Já a validação e justificação de conjeturas é realizada pelos alunos de formas diferentes, sendo a etapa do processo de raciocínio matemático menos presente nos seus trabalhos.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, critérios de avaliação, tarefas de exploração/investigação.

ABSTRACT

This study seeks to understand how students of 6^{th} grade students develop the mathematical reasoning, when supported and encouraged the use of continuous evaluation criteria. With this aim, it is intended to answer the following research questions: (i) When students perform tasks that call for mathematical reasoning seek to use the evaluation criteria that they have? How do?, (ii) How does the use of evaluation criteria guide students in the progression of different levels of mathematical reasoning? and (iii) What are the main difficulties that students face when reason mathematically? How does the use of evaluation criteria can help overcome these difficulties?.

The used methodology is qualitative, based on the interpretive paradigm. It is made the case study of three students who have different levels of school performance to the discipline of Mathematics, making them a workgroup. For data collection are used as instruments: (i) classroom observation accompanied by a teacher journal, (ii) semi-structured interviews with three students selected, in audio support, and (iii) documents analysis.

The data analysis assumes a character essentially descriptive and interpretive. The results show that students use the evaluation criteria following the order of steps for each set and to each one the order of levels, from the most basic to the most elaborate. Its continued use promotes appropriation and helps students to clarify the different stages of mathematical reasoning.

Among the different steps in the defined evaluation criteria, students often establish relations between objects and formulate conjectures with some dexterity, based on its observations. The test cases allow them greater flexibility between concepts, as well as verbal interactions among peers. Already the validation and justification of conjectures is performed by students in different ways, being the stage of the process of mathematical reasoning less present in their work.

Key-words: Mathematical reasoning, evaluation criteria, exploration and investigation task.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, pelo rigor com que coordenou e orientou este trabalho, pela confiança que depositou em mim, pelas suas críticas, sugestões e palavras de incentivo, mas sobretudo pela simpatia e constante disponibilidade;

À turma que participou neste estudo e, em particular, aos alunos que realizaram as entrevistas, pela colaboração e disponibilidade, bem como pelo empenho que demonstraram;

Ao meu amigo Pedro Bacalhau, pelo companheirismo, apoio e ajuda;

À minha mãe, por me ter ensinado a ser persistente e por me apoiar incondicionalmente;

À restante família e amigos, pela compreensão dos momentos em que não pude estar presente.

Uma oportunidade de crescimento
pessoal e profissional

ÍNDICE

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresento a minha motivação e pertinência para a realização do estudo. Este tem por base uma intervenção pedagógica que procurou desenvolver o raciocínio matemático de alunos do 6.º ano de escolaridade, tendo como suporte auxiliar uma grelha de critérios de avaliação. A partir dos dados recolhidos ao longo desta intervenção desenvolvi um trabalho de investigação que procura compreender a forma como os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

A minha inscrição no Mestrado em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, surgiu a partir da necessidade de dar continuidade a dois anos consecutivos de formação no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do Ensino Básico, promovida pela Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) e algumas formações inerentes ao Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), homologado em 2007 e generalizado a todo o ensino básico no ano letivo 2010/2011. Desde logo percebi que emergiam mudanças, podendo destacar-se:

– *mudança no ensino*, trata-se de uma abordagem que tem como pano de fundo a ideia de que a exploração e a discussão de tarefas cognitivamente desafiantes favorecem a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivam o raciocínio e o pensamento reflexivo, sendo isto essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão. Desta forma, o professor deve promover contextos de aprendizagem em que o papel da resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática – competências transversais a desenvolver nos alunos – seja preponderante em detrimento da exposição centrada no professor;

– *mudança na aprendizagem*, que caminha em direção a uma atividade de investigação, à justificação, à argumentação e à aplicação de várias estratégias para a resolução de problemas, incluindo a reflexão sobre a aprendizagem da Matemática, numa atitude metacognitiva, não incidindo, como foco único, na memorização e na repetição;

– *mudança na avaliação*, em direção ao princípio de que esta se deve basear em evidências provenientes de diversas fontes e não unicamente nos dados provenientes de um único modo e instrumento de avaliação.

Deste modo, vim à procura de respostas para as minhas dúvidas inerentes às mudanças, aprender e refletir acerca de novas abordagens a implementar na prática letiva, em conjunto com os meus pares. Entre as várias unidades curriculares de opção no segundo semestre, escolhi a "Avaliação das Aprendizagens em Matemática". Nesta disciplina foram analisados e discutidos, entre outros, os diversos diplomas legais que regulamentam a avaliação, artigos de autores com diferentes perspetivas acerca desta temática, nomeadamente avaliação reguladora, e modos e instrumentos alternativos de avaliação. Assim, surgiu uma área na qual considerei que haveria bastante matéria para aprender.

O PMEB (DGIDC, 2007) menciona, para os três ciclos de ensino, as capacidades transversais, como a resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática, a desenvolver com os alunos nos diferentes temas a abordar – Números e Operações, Álgebra, Geometria, Organização e Tratamento de Dados. A implementação destas capacidades constitui uma das novidades apresentadas face ao programa anterior. Como o raciocínio matemático aparece dissociado da resolução de problemas, senti a necessidade de compreender como poderia ajudar os alunos a desenvolver esta capacidade transversal, ou seja, que tipo de tarefas lhes deveria proporcionar e como avaliava a sua atividade. Para qualquer um dos temas, o professor tem de planificar as suas aulas tendo em linha de conta como promover essas capacidades transversais e o modo de recolha de informação que lhe permita compreender se o processo de ensino-aprendizagem necessita de reajustamento face ao sucesso das aprendizagens.

Neste sentido, parece pertinente pensar de que forma se pode avaliar, numa perspetiva não certificativa, mas formativa, através da análise de informação acerca do raciocínio matemático, para contribuir que os alunos compreendam e atribuam significado a este termo. É necessário criar consenso, na sala de aula, acerca do seu significado. Foi a partir desta ideia que me apropriei de uma grelha elaborada pela Comissão de Acompanhamento do Plano da Matemática II e da primeira fase de generalização do PMEB (anexo I) que procura definir critérios de avaliação, indicadores e descritores para serem utilizados pelos professores como base de trabalho para a avaliação formativa do raciocínio matemático.

Considerando a autorregulação como uma competência que o aluno pode desenvolver, cabe ao professor criar contextos para a estimular e proporcionar cenários de aprendizagem que a promovam. Por isso, o professor deve estabelecer objetivos, planear a sua atuação, observar de forma crítica e avaliar à luz de critérios pré-determinados.

No que concerne ao raciocínio matemático, nem sempre os professores definem critérios para o avaliar, possivelmente porque a palavra "raciocínio" é muito abrangente. Todavia, no contexto da disciplina de Matemática, é necessário particularizá-lo e definir claramente o que se pretende quando é necessário validá-lo. Desta forma, considerei oportuno apresentar uma grelha de critérios de avaliação, com função orientadora, onde se indicam as etapas do processo de raciocínio matemático e os diferentes níveis de desempenho. Considerei, ainda, que os alunos podem fazer parte do processo de elaboração dos descritores de cada nível, para que compreendam o que lhes é solicitado em tarefas que apelam ao raciocínio matemático, promovendo simultaneamente momentos de aprendizagem, de reflexão, de diálogo e de negociação (Cambra-Fierro & Cambra-Berdún, 2007). Tendo como referência a ideia protagonizada pelos autores mencionados, considerei pertinente fornecer aos alunos um suporte físico (grelha) onde eles se pudessem apoiar para saber o que se esperava que realizassem nas atividades que envolvessem raciocínio matemático, assim como situarem o seu nível de desempenho, conduzindo-os desta forma a um processo de autorregulação.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Este estudo tem como objetivo compreender como os alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico se apropriam dos vários níveis do raciocínio matemático (do elementar ao mais sofisticado) e como o desenvolvem, quando apoiados e incentivados a usar de forma continuada os critérios de avaliação. Após a seleção do objetivo de estudo, foram definidas as questões que se revelaram, no momento, mais pertinentes para a sua consecução:

- Quando os alunos realizam tarefas que apelam ao raciocínio matemático procuram usar os critérios de avaliação de que dispõem? Como o fazem?
- De que modo o uso dos critérios de avaliação orienta os alunos na progressão dos diferentes níveis do raciocínio matemático?

- Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam quando raciocinam matematicamente? De que modo o uso de critérios de avaliação pode ajudar a ultrapassar estas dificuldades?

Com a implementação do PMEB (DGIDC, 2007), onde estão caracterizadas as capacidades transversais, surgiu o interesse pessoal e profissional relativo à forma de as desenvolver nos alunos e avaliar, considerando que para esse efeito a avaliação formativa/reguladora pode dar um contributo positivo.

Espero, assim, contribuir para o meu desenvolvimento pessoal e profissional, melhorando os meus conhecimentos sobre as tarefas a propor aos alunos, bem como as respetivas potencialidades e eventuais dificuldades de concretização. Com este estudo pretendo também contribuir para o aprofundamento do conhecimento disponível para a comunidade profissional dos professores de Matemática sobre o ensino e a aprendizagem das fases de desenvolvimento do raciocínio matemático em tarefas de investigação.

1.3. Contexto escolar

Este estudo desenvolveu-se numa Escola de Ensino Básico de 2.º e 3.º ciclos na zona oriental de Lisboa. Trata-se de uma escola de Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), desde o ano letivo 2008/2009, devido a uma população educativa de alunos oriundos de famílias da classe média baixa e de alunos provenientes de famílias carenciadas, constituindo uma diversidade que, embora seja culturalmente enriquecedora, coloca desafios aos professores e exige uma maior criatividade da sua prática letiva e a implementação de novas soluções.

No documento projeto TEIP, redigido por um grupo de trabalho da escola, consta: "A heterogeneidade da população do bairro evidencia descaracterização cultural, fraca formação pessoal e social dos adultos, baixa qualidade de vida e desorganização familiar". Estes fatores traduzem-se numa ausência de valores que condiciona o sucesso educativo e provoca grande desinteresse e desmotivação nos discentes. Em simultâneo, existem baixos níveis de autoestima e autoconfiança dos alunos que têm origem em carências das áreas afetiva e socioemocional.

Parte da comunidade possui uma cultura muito elementar, a qual desvaloriza o saber, registando também um baixo nível no que respeita à formação cívica, situação que se reflete na ausência de regras comportamentais e na postura negativa perante situações de trabalho. Pode ainda ler-se no mesmo documento: “As manifestações de insucesso escolar são múltiplas, mas três delas são particularmente visíveis: (i) algum abandono da escola antes do fim do ensino obrigatório, (ii) retenções e reprovações sucessivas que dão lugar a grandes desníveis entre a idade cronológica do aluno e o nível escolar e onde os níveis de fracasso podem ser totais (em todas as áreas de estudo ou quase) ou parciais (numa ou duas áreas de estudo), e (iii) a passagem dos alunos para tipos de ensino menos exigentes, com currículos pouco adequados.”

Todos estes aspetos influenciam negativamente o sucesso educativo dos alunos, o que se traduz na persistência do insucesso escolar nos diferentes anos de escolaridade. Uma outra constatação é que um número significativo de alunos permanece, durante anos, sem adquirir os conhecimentos básicos no domínio da Língua Portuguesa e da Matemática. Contudo, no referido documento não se encontram quaisquer dados estatísticos ou valores numéricos que sustentem as afirmações referidas.

1.3.1. Caracterização da turma

Para a aplicação deste estudo, selecionei a turma de 6º ano cujos alunos já conhecia do ano letivo anterior, assim como os respetivos encarregados de educação, o que facilitava a comunicação com os mesmos. Fui professora de Matemática da turma no 5º ano e, por isso, conhecia o ritmo de aprendizagem e de trabalho dos alunos. Na sua maioria, provinham da turma do ano letivo transato, por isso conheciam-se bem uns aos outros. Havia um relacionamento saudável, aceitando as diferenças de alguns colegas, colaborando e prestando ajuda quando solicitados. Era uma turma heterogénea, no sentido de haver três grupos diferenciados ao nível do desempenho disciplinar.

Assim, havia um grupo de seis alunos, que corresponde a 27%, que não manifestava dificuldades a nenhuma disciplina, outro de seis alunos, que corresponde igualmente a 27%, que evidenciava dificuldades cumulativamente a Língua Portuguesa (LPO) e a Matemática (MAT) e o último de 10 alunos, que perfaz 46%, que refletia dificuldades a estas e outras disciplinas. Esta leitura pode ser realizada na figura 1.1.

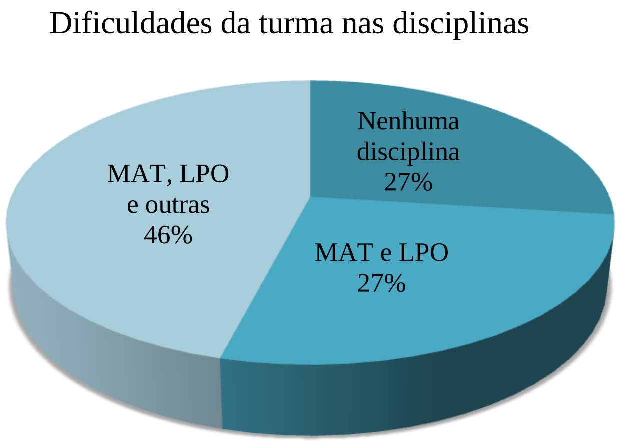


Figura 1.1 – Diagnóstico relativo às dificuldades da turma nas disciplinas

No que refere ao ano letivo 2011/2012, fui professora de Matemática e Diretora de Turma, pelo que tive acesso facilitado ao Projeto Curricular de Turma, de onde recolhi muita da informação que passo a descrever para caracterizar a turma. Por um lado, tive muitas conversas informais com os alunos em que eles me contavam relatos acerca das suas preferências, quer de nível académico, quer de nível pessoal. Por outro, nas reuniões particulares com os encarregados de educação, estes também manifestavam as suas motivações e preocupações em relação aos seus educandos.

A turma sofreu alterações com a entrada de três elementos novos, dois com retenção repetida e um transferido. Iniciou o ano letivo com 22 alunos, sendo doze rapazes e dez raparigas, com idades compreendidas entre os dez e os catorze anos, conforme consta no quadro 1.1.

Quadro 1.1 – Idades dos alunos da turma

Idades	Número de alunos
10	3
11	11
12	4
13	2
14	2

Todos os alunos são de nacionalidade portuguesa e naturais, na sua grande maioria, de Lisboa. Trata-se de uma turma reduzida por incluir quatro alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE) e seis alunos que concluíram o 1.º ciclo em Percurso Curricular Alternativo (PCA). Estes transitaram para o 6.º ano com mais de 3 níveis negativos às disciplinas curriculares, incluindo a Matemática, sendo as justificações apresentadas pelo Conselho de Turma para a sua transição o desfasamento das idades para se manterem numa turma de 5.º ano e o elevado número de retenções no seu percurso escolar (conforme escrito em ata de Conselho de Turma, na reunião final de avaliação), segundo o que consta no quadro 1.2.

Quadro 1.2 – Número de retenções no percurso escolar dos alunos

Ano de escolaridade	Número de alunos
Retenção no 2.º ano	1
Retenção no 4.º ano	4
Retenção no 2.º e 4.º anos	2
Retenção no 5.º ano	2
Retenção no 2.º, 4.º e 5.º anos	1

Estes alunos apresentam um ritmo lento de aprendizagem, muitas dificuldades na leitura, interpretação, compreensão, vocabulário restrito, dificuldades de memorização, de relacionamento de conceitos e de consolidação dos conteúdos programáticos. Desde o início deste ano letivo, estes alunos beneficiaram de apoio educativo em sala de aula a Língua Portuguesa e a Matemática, em noventa minutos semanais, coexistindo um par pedagógico neste tempo letivo. Neste contexto, o envolvimento geral da turma era pouco satisfatório, quer na disciplina de Matemática, quer nas restantes disciplinas, apresentando lacunas ao nível das aprendizagens como se verifica no gráfico apresentado.

Dificuldades académicas da turma

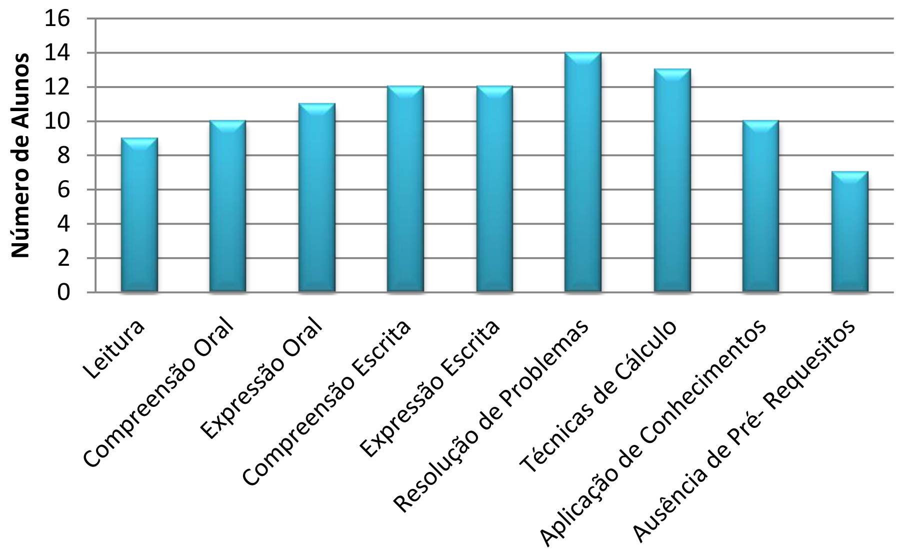


Figura 1.2 – Diagnóstico relativo às dificuldades académicas da turma

Esta análise foi elaborada em Novembro de 2011, início do ano letivo, pelo Conselho de Turma, e registada numa tabela (anexo III) que consta no Projeto Curricular de Turma. Como se pode verificar no gráfico (figura 1.2), há um elevado número de alunos que a nível académico mostram dificuldades na compreensão oral e escrita, expressão oral e escrita, resolução de problemas e cálculo mental, destacando-se, assim maiores dificuldades nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. Apesar das dificuldades académicas, são crianças com interesse pela vida escolar e gostam das tarefas realizadas na sala de aula. Há alguma motivação intrínseca para a aprendizagem, ajudando-se mutuamente nas dificuldades. Encontram-se bem integrados na escola e com uma boa relação entre os seus pares.

Gostam de atividades físicas e desportivas, de trabalhos de projeto que envolvam atividades práticas, de trabalhar em grupo e de manifestar as suas opiniões. São conhecedores de atitudes cívicas coerentes e da promoção de um estilo de vida saudável. No seu conjunto, a turma é responsável por um clima participativo, por vezes ruidoso. Devo referir que existem alguns alunos responsáveis pela criação de situações perturbadoras, havendo dois alunos com um quadro problemático pessoal, constituindo por vezes o epicentro da agitação, rapidamente generalizada por toda a turma.

Na disciplina de Matemática, os alunos trabalham cooperativamente, ou seja, estão organizados de forma a poderem prestar ajuda ao colega de carteira. Apesar das dificuldades que apresentam ao nível da aprendizagem, na generalidade, os alunos gostam da disciplina, porque lhes agrada trabalhar as tarefas, promover discussões na aula e porque é uma disciplina prática, em que a professora não está muito tempo a expor a matéria. Reconhecem, contudo, como refere a Rute que "é a mais difícil porque temos de trabalhar todos os dias" e quando os questiono porque não o fazem, respondem que às vezes é porque se esquecem ou então porque quando chegam a casa vão brincar ou jogar no computador e depois já não têm vontade de estudar e de fazer os trabalhos de casa, isto é, ainda não têm rotinas de trabalho interiorizadas. Alguns alunos são pouco acompanhados e pouco orientados pelos encarregados de educação, tendo estes baixas expetativas académicas em relação ao futuro dos seus educandos (quadro 1.3), conforme explicitam na ficha de caraterização dos seus educandos.

Quadro 1.3 – Expetativas dos encarregados de educação face ao percurso académico dos seus educandos

Percurso académico	Número de alunos
Concluir o 12.º ano de escolaridade	7
Concluir um curso técnicoprofissional	9
Concluir um curso superior	6

1.3.2. Os alunos selecionados

Embora toda a turma seja participante no estudo, na medida em que realizaram e vivenciaram todas as atividades previstas, tornou-se necessário identificar um grupo de alunos, de menor dimensão, que permitisse uma análise mais detalhada de cada uma das questões de investigação. Assim, optei por selecionar um grupo constituído por três alunos para a realização das entrevistas e para análise das suas produções escritas: o Duarte, o João e a Rute. Os nomes aqui indicados são fictícios para assegurar o seu anonimato.

A seleção destes três alunos foi feita tendo por base os seguintes critérios: serem bons comunicadores, ou seja, serem claros na exposição das suas ideias; serem de sexos diferentes, para existir diferenciação de género; terem diferentes desempenhos na disciplina de Matemática, para que o grupo seja heterogéneo; e apresentarem disponibilidade para ficar na escola depois do horário letivo. Os três alunos constituem um grupo de trabalho para que uns com os outros se apropriem dos significados do processo de raciocínio e os apliquem na construção dos descritores da grelha de critérios de avaliação. O trabalho de grupo é enriquecedor uma vez que permite "que os alunos exponham as suas ideias, ouçam os colegas, coloquem questões, discutam estratégias e soluções, argumentem e critiquem outros argumentos" (Ponte e Serrazina, 2000, p. 128).

Duarte

Duarte tem 10 anos, é natural de Lisboa e vive perto da escola, com os pais e a irmã que estuda no ensino secundário. Os pais têm como habilitações literárias a Licenciatura. Frequenta esta escola desde o 5.º ano de escolaridade, não tendo como escola de origem uma do agrupamento. Não apresenta nenhuma retenção no seu percurso escolar e menciona na ficha de caraterização do aluno que gosta de todas as disciplinas, destacando a História como a sua preferida. A Matemática também é uma das disciplinas de que gosta, afirmando na primeira entrevista o que mais gosta numa aula de Matemática, não indicando nenhum aspeto que lhe agrade menos.

> **Professora:** Dá-me alguns exemplos do que mais gostas numa aula de Matemática.
> **Duarte:** Numa aula de Matemática... Gosto quando fazemos desafios, desafios é um jogo, não é? (Pausa)
> **Duarte**: Ummm... Gosto de fazer problemas, contas, divisões, também gosto muito de divisões... Eeeeh o que eu gostei sempre foi jogar, jogar aos jogos matemáticos. A professora no 5º ano trazia um jogo que era o "Super T" e o "Jogo do 24". Tínhamos de fazer contas e depois íamos ganhando pontos.
> **Professora:** Ok… Então dá-me alguns exemplos do que não gostas.
> **Duarte:** Bom o que acabo por não gostar? Pouca coisa, gosto de tudo!

O aluno manifesta gosto pela disciplina de Matemática e considera, ainda, que a Matemática é importante para o dia-a-dia das pessoas e que está presente em todas as actividades da vida em sociedade, como refere ainda na primeira entrevista.

Professora: Consideras que a Matemática é importante para o teu dia-a-dia?
Duarte: Acho pessoalmente que sim... Porque a Matemática... A minha mãe disse-me sempre assim... Porque um dia cheguei não muito contente da escola, por causa da Matemática, e a minha mãe disse-me assim "Oh Duarte não fiques assim irritado! A Matemática vai ser útil para tooooda a tua vida". Porque estamos a utilizá-la constantemente no dia-a-dia. Por exemplo, eu agora fui ao buffet da escola e perguntaram-me quantas torradas eu queria e eu disse "uma" e já tem a ver com a Matemática.
Professora: Exato. E pagaste?
Duarte: Sim, foi 55 cêntimos, paguei com o cartão.
Professora: Exato. Tens uma ideia do valor que pagas pelos produtos?
Duarte: Sim.
Professora: Consegues arranjar outro exemplo que esteja relacionado com a Matemática, no dia-a-dia?
Duarte: Que esteja em minha casa? E relacionado com a Matemática?
Professora: Sim, pode ser.
Duarte: Tenho um relógio de parede, tenho um relógio de pulso (pausa). Tenho também um arco de ula ula, na cave, que tem a forma de circunferência.

O aluno revela um entendimento dos objetos que utiliza no seu quotidiano, estabelecendo relações com a Matemática. Tem muito bom desempenho em todas as disciplinas, incluindo a Matemática. No terceiro período do ano letivo anterior, obteve nível cinco a todas as disciplinas, exceto a Educação Física, à qual obteve nível quatro.

Na atividade matemática é empenhado na realização das tarefas propostas, participativo nas discussões de turma e colaborador nos trabalhos de grupo. Nas aulas desta disciplina, é um aluno atento, empenhado e muito participativo, gostando de colocar questões e responder quando a professora questiona.

Numa conversa informal com a turma em Formação Cívica, pegando na ficha de caraterização dos alunos, tive oportunidade de ouvir e comentar o que os alunos fazem nos seus tempos livres e as expetativas que têm para o seu futuro. Então, Duarte afirmou: "Nos meus tempos livres pratico desporto e vejo televisão.", o que sugere que o aluno tem um estilo de vida comum a muitos jovens da sua idade. Os seus objetivos futuros passam por tirar um curso universitário. Ainda neste diálogo, Duarte referiu "Não sei ainda bem qual é o curso, mas acho que vai ser relacionado com História.".

João

João tem 11 anos de idade, vive com os pais e o irmão frequenta o ensino secundário. A sua residência fica a mais de 50 quilómetros da escola. Como os pais trabalham em Lisboa, toda a família faz este percurso diariamente, ficando o João muitas horas na escola. As habilitações dos pais são a frequência do ensino secundário. O João entrou nesta escola no 5.º ano, não tendo como escola de origem uma do agrupamento. Não apresenta nenhuma retenção no seu percurso escolar. Refere, na ficha de caraterização do aluno, que gosta de todas as disciplinas, mas que gosta pouco de Educação Visual e Tecnológica e que gosta muito de Educação Física, principalmente de jogar futebol. Também na primeira entrevista mencionou o que mais gosta numa aula de Matemática, assim como o que gosta menos, salientando que gosta de compreender a linguagem do professor e de fazer as atividades bem feitas e que não gosta de errar e ser interrompido pelos colegas.

> **Professora:** Dá-me exemplos do que mais gostas numa aula de Matemática.
> **João:** Gosto de saber fazer bem as coisas, não gosto de errar e gosto de entender bem a professora. Basicamente é o que eu gosto.
> **Professora:** Muito bem. Agora dá-me exemplos do que menos gostas.
> **João:** Não perceber bem, ou porque estou desatento, ou porque não entendo as palavras do professor.
> **Professora:** E outra coisa que não gostes?
> **João:** Na aula de Matemática quando a professora pergunta a uma pessoa e os outros colegas respondem sem me deixar pensar.

É um aluno introvertido e não assume protagonismo no seio da turma, mas quando questionado intervém. Comunica bem as suas ideias, é atento, interessado, trabalhador e bem comportado. Nas aulas de Matemática, prefere trabalhar individualmente para ter bom comportamento e estar atento à explicação da professora – é esta a explicação que refere quando é solicitado a trabalhar, por vezes, com alguns colegas menos atentos.

Relativamente à importância da Matemática para o seu quotidiano, ao analisar o pequeno excerto da primeira entrevista do aluno, constato que com a ajuda das questões e das imagens apresentadas (anexo IV), o aluno começa a percecionar que de facto a Matemática está presente no seu dia-a-dia.

> **Professora:** Então, a conclusão é? Que todas as imagens...
> **João:** São relacionadas com a Matemática.
> **Professora:** Estão relacionadas com o teu dia-a-dia e são coisas práticas... Coisas com as quais te cruzas no dia-a-dia. Sim ou não?

João: Sim, são... O mapa no caso de estar perdido, por exemplo, o calendário para saber em que dia estou, o relógio para saber as horas, o supermercado para ir às compras, a forma de pirâmide nos edifícios.
Professora: Se reparares nos edifícios começas a ver as formas de muitos dos sólidos geométricos... Já pensaste nisso?
João: Sim…
Professora: Então significa que afinal a Matemática não é só para os cientistas, como a ideia que tinhas inicialmente.
João: Afinal a Matemática está no nosso dia-a-dia... Até o relógio de parede é redondo, o mapa é retangular.
Professora: Sim, muito bem não tinhas pensado nisso. Vamos à 2ª questão: dá um exemplo de algo que tenhas em casa que se relacione com a Matemática.
João: O meu relógio de parede, calculadoras, várias mobílias que me fazem lembrar sólidos geométricos.
Professora: Consideras, então que a Matemática é importante para o teu dia-a-dia?
João: Sim.
Professora: E porquê?
João: Preciso muito da Matemática para fazer várias operações, por exemplo no supermercado, para saber quanto vou pagar, por exemplo, quando me dão o talão da compra para saber se está certo ou errado, como já me aconteceu.

João tem bom desempenho em todas as disciplinas incluindo a Matemática. No terceiro período do ano letivo anterior, obteve nível quatro a todas as disciplinas, exceto a Língua Portuguesa, à qual obteve nível três. Tem como objectivo concluir um curso superior mas ainda não sabe qual. No entanto, "o que gostava mesmo era de ser jogador de futebol". Nos seus tempos livres, pratica futebol num clube desportivo.

Rute

Rute tem 11 anos, é filha única e vive com os pais perto da escola. As habilitações dos pais são a frequência do ensino básico. Está nesta escola desde o 5.º ano de escolaridade, tendo como escola do 1.º ciclo uma escola do agrupamento. Não tem retenções no seu percurso escolar. Refere na ficha de caraterização do aluno que gosta de todas as disciplinas, mas a que menos gosta é Língua Portuguesa.

Na aula de Formação Cívica, quando os alunos manifestavam as disciplinas preferidas e as suas expetativas para o futuro, entre outros assuntos a Rute verbalizou "A minha mãe conversa muito comigo sobre a escola. Quer saber qual é o meu comportamento e como vão as matérias de estudo.". No mesmo diálogo, a aluna afirma que gosta da disciplina de Matemática, mas que "às vezes é um bocadinho difícil". Quando questionada porquê, diz que "é preciso fazer muitos exercícios para perceber melhor a matéria".

Tal como os dois colegas anteriores, a Rute também realizou a primeira entrevista que visava saber o que a aluna mais gosta numa aula de Matemática e o que menos gosta, bem como compreender se associa a Matemática ao seu dia-a-dia.

> **Professora:** Dá exemplos do que mais gostas numa aula de Matemática.
> **Rute:** Gosto de fazer contas e gosto de resolver problemas.
> **Professora:** Muito bem. Agora, dá-me exemplos do que menos gostas.
> **Rute:** Quando a professora está sempre a repetir as mesmas coisas, quando eu já percebi... Mas eu sei que às vezes há meninos que ainda não perceberam. Também não gosto que me interrompam quando estou a falar.

Efetivamente, a aluna nas aulas mostra uma certa impaciência para com os colegas que estão desatentos e que "obrigam" a professora a repetir os assuntos. Para colmatar esta inquietude a aluna solicita muitas vezes o feedback da professora para assim poder prosseguir para outros exercícios, problemas ou tarefas de desenvolvimento. É muito autónoma e gosta de estar sempre a trabalhar.

Na entrevista, mostra um exemplo elucidativo de como aplica a Matemática ao seu quotidiano, fazendo uma atividade de que gosta, o cálculo.

> **Professora:** Consideras que a Matemática é importante para o teu dia-a-dia?
> **Rute:** Sim, no supermercado, porque temos de fazer contas de cabeça...
> **Professora:** De cabeça ou no papel, não é? Mas para que precisamos de fazer contas?
> **Rute:** Por exemplo, se nós tiverrmos só 10 euros e queremos comprar um pacote de açúcar, vamos imaginar que é 1euro, depois queríamos comprar o mapa-mundo, vamos imaginar que são 5 euros, já estão 6. Agora queríamos comprar um "chupa chups" que era 50 cêntimos. Já estava 6,50. Depois queremos comprar mais... (pausa) sei lá... Carne. Carne mais 10 euros e queríamos que sobrasse 4 euros para irmos comprar o jornal Expresso, ao sábado. Já não dava.
> **Professora:** Então que quer dizer que as compras que nós fazemos no dia-a-dia também estão relacionadas... (em simultâneo) com a Matemática?
> **Rute:** Sim.
> **Professora:** Diz-me um exemplo de algo que tenhas em casa e se relacione com a Matemática.
> **Rute:** O relógio.
> **Professora:** Exato, o relógio. Mas outro que não esteja aqui nas imagens.
> **Rute:** Um chocolate, está dividido em partes. Relaciono com as frações.
> **Professora:** Muito bem. Só falta dizer "dividido em partes iguais".

É notório que os alunos recorreram às imagens para apoiar as suas respostas. Todavia, a Rute ao mencionar o chocolate, recordou o exemplo dado em sala de aula, para concretizar uma situação quotidiana no estudo das frações.

Rute tem um desempenho satisfatório na generalidade das disciplinas, assim como em Matemática. No terceiro período do ano letivo anterior obteve nível três a Língua Portuguesa, Matemática e Inglês e nível quatro às restantes disciplinas. Nas aulas de Matemática, é atenta e empenhada, envolvendo-se ativamente nas tarefas propostas, individualmente ou em pequeno grupo. No entanto, revela-se sempre mais à vontade na resolução de exercícios do que em tarefas mais abertas. Nas discussões gerais só intervém quando é solicitada ou quando se apercebe de que o seu contributo é importante para toda a turma. Os seus planos para o futuro passam por continuar a estudar para ter uma vida melhor e um dia gostaria de ser Educadora de Infância. Nos tempos livres, gosta de praticar natação e conversar com as amigas.

1.4. Organização do relatório

O presente relatório está organizado em quatro capítulos. Começando pela introdução, o capítulo que se segue apresenta perspetivas teóricas e documentais sobre os significados e desenvolvimento do raciocínio matemático, ao nível da matemática escolar. Em seguida, considero relevante expor alguns princípios e orientações acerca da avaliação das aprendizagens, dando maior atenção à avaliação formativa e à importância dos critérios de avaliação. No terceiro capítulo, faço um enquadramento relativo às tarefas de investigação em contexto de sala de aula, apresento a proposta de planificação das aulas e a descrição das mesmas. Referencio, ainda, as opções metodológicas deste estudo e os instrumentos utilizados para a recolha de dados. No último capítulo elaboro a análise dos dados, categorizando algumas rúbricas para uma melhor compreensão dos mesmos, e uma reflexão sobre o impacto deste estudo na minha prática letiva, no desempenho dos alunos e na comunidade de professores de Matemática.

2. ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

2.1. Raciocínio matemático

Neste capítulo apresento uma revisão de literatura de diferentes autores sobre a problemática do conceito de raciocínio matemático. Pretendo apontar diversas perspetivas, significados e correntes para o desenvolvimento do raciocínio matemático numa aprendizagem com significado em tarefas de exploração/investigação com alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Faço ainda um enquadramento da avaliação das aprendizagens numa vertente formativa.

2.1.1. Significados de raciocínio matemático

A importância do raciocínio na Matemática é unanimemente reconhecida. No entanto, muitos são os autores que apresentam diferentes formas e modos de entendimento desta capacidade a desenvolver nesta área. Que a Matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio faz parte do senso comum da nossa sociedade. Porém, o que se entende por "raciocínio" nem sempre é muito claro, tornando-se numa palavra polissémica. Para ilustrar esta ideia Santos & Pinto (2009) citou "Não sabemos o que é, realmente, o raciocínio matemático..." (Steen, 1999, p. 56).

> É complicado escrever sobre raciocínio em Matemática, porque o termo raciocínio, tal como compreensão, é amplamente usado tendo subjacente a hipótese implícita de que há acordo universal sobre o seu significado. (...) Na realidade a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam o termo sem o clarificarem.
>
> A ênfase no raciocínio matemático em todos os níveis de escolaridade atrai a atenção para a argumentação matemática e justificação. (Yackel & Hanna, 2003, p. 56)

Como se pode constatar, parece não existir uma definição muito clara para a compreensão da palavra "raciocínio". Todavia, alguns autores apontam caminhos, como Pólya (1954) ao afirmar que um tipo de raciocínio fundamental em Matemática é o raciocínio dedutivo. Refere ainda que a Matemática é o domínio do conhecimento em que se usa o raciocínio dedutivo, nomeadamente nas demonstrações matemáticas.

No entanto, ainda este autor, destaca igualmente a importância do raciocínio indutivo como um caso particular do raciocínio plausível que está presente na atividade criadora dos matemáticos. Afirma que a indução está associada ao método experimental usado pelos cientistas, cuja primeira etapa é a observação, seguindo-se a formulação e o teste de conjeturas. Indica que, à medida que a conjetura resiste aos testes, torna-se mais credível, mas salienta que existe sempre a possibilidade da indução, por vezes, conduzir ao erro. Defende que os raciocínios dedutivo e indutivo se complementam, razão pela qual devem estar presentes na sala de aula e ser ensinados em paralelo. O mesmo autor (Pólya, 1990) reforça que o raciocínio indutivo ocupa também um lugar importante na Matemática.

Igualmente importante é saber que processos de raciocínio são usados na realização de diferentes tipos de tarefas matemáticas. Assim, podemos dizer que a resolução de problemas e de exercícios incluem, num certo nível, a formulação de uma estratégia geral de resolução de um problema ou a identificação de um método de resolução de um exercício e, noutro nível, a realização de um passo, transformação ou cálculo e sua justificação. Na realização de explorações e investigações, temos, por um lado, a formulação de uma conjetura (sobre um objeto específico ou genérico), apoiada numa razão e, por outro, a definição de uma estratégia de teste de uma conjetura. Finalmente, uma demonstração envolve, num certo nível, a formulação de uma estratégia geral de demonstração e, noutro nível, a construção de uma cadeia argumentativa (formulação de passos justificados que levam à conclusão). Ponte e Sousa (2010, p. 32) referem ainda um outro processo de raciocínio comum aos três tipos de tarefa referidos acima que assume, por isso, uma importância fundamental, o estabelecimento de relações (de equivalência, de ordem, de pertença, …) entre objetos matemáticos ou não matemáticos.

Mason, Burton e Stacey (1982) distinguem quatro processos que consideram fundamentais no pensamento matemático: especialização, formulação de conjeturas, teste e justificação. Burton (1984) sublinha que a especialização é essencial na abordagem indutiva de um problema. O processo de especialização é utilizado na exploração de casos particulares ou na procura de regularidades. Uma vez formuladas conjeturas, é necessário procurar justificações para uma melhor compreensão e uma validação ou refutação, reiniciando todo o processo se necessário. Ponte e Matos (1996), analisando igualmente os processos de raciocínio presentes na realização de investigações matemáticas, indicam a sua complexidade e referem que estes se desenvolvem nas seguintes fases: (i) a formulação de questões a estudar; (ii) a definição de estratégias; (iii) a reflexão sobre as experiências desenvolvidas e a formulação e teste de conjeturas; e (iv) a validação das conjeturas previamente testadas.

Oliveira (2002) identifica e descreve quatro tipos de raciocínio presentes nas aulas de Matemática: indução, dedução, abdução e transformação. Caracteriza a indução como sendo um tipo de raciocínio do particular para o geral onde está presente um pensamento do tipo heurístico. Na indução, os objetos trabalhados são estáticos, não é necessária uma conclusão e o papel que se destaca é o de criação de conhecimento. Na sua perspetiva, a dedução apresenta um esquema de raciocínio do geral para o particular, exigindo um pensamento lógico ou formal. Este tipo de raciocínio tem um papel de validação, sendo necessário chegar a uma conclusão. No raciocínio dedutivo não existe produção de novo conhecimento e os objetos são também estáticos. A abdução funciona a partir de factos para os quais se procura uma explicação através da utilização de um pensamento crítico. O papel deste tipo de raciocínio é explicar e criar conhecimento, pretendendo-se chegar a uma conclusão plausível e, a partir da manipulação de objetos estáticos, produzir novo conhecimento. Por fim, caracteriza a transformação como um tipo de raciocínio que desempenha um papel de criação e validação de conhecimento, no qual se manipulam objetos dinâmicos e se pretende uma explicação ou validação a partir de imagens.

Alguns autores discutem os diversos tipos de raciocínio pela sua estrutura formal, ou seja, de um ponto de vista epistemológico, e outros colocam-se num ponto de vista essencialmente psicológico. É o caso do psicólogo Sternberg (1999) que refere que o raciocínio matemático requer não só pensamento analítico, mas também pensamento criativo e prático. Na sua perspetiva, alguns dos processos metacognitivos envolvidos no raciocínio matemático incluem: (i) a identificação da natureza do problema; (ii) a formulação de uma estratégia para resolver o problema; (iii) a representação mental do problema; (iv) a procura de recursos que conduzam à solução do problema; e (v) a verificação da solução. Por seu lado, English (1999) dá particular atenção ao raciocínio por analogia. Refere que este raciocínio requer uma atenção focalizada nas características que se relacionam numa determinada situação, constituindo desta forma uma poderosa ferramenta de aprendizagem. Na sua perspetiva, o raciocínio por analogia permite clarificar uma situação, organizar a resolução de um problema e enfatizar os processos de raciocínio envolvidos na resolução de um problema que podem ajudar na resolução de outro. Oliveira (2002, p. 174) sublinha igualmente a estreita relação entre analogia e indução, salientando que "quem induz fá-lo por analogia, isto é, a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos". Para além disso, é através do raciocínio indutivo que se elaboram conjeturas que podem ser posteriormente verificadas.

Considerando-se que a palavra raciocínio não gera consenso, do ponto de vista polissémico, os autores referidos apontam caminhos para o entendimento deste conceito, focando processos de raciocínio matemático. Estes processos são definidos e caraterizados em fases ou etapas. De uma forma geral, evidenciam que o raciocínio indutivo está presente na observação, formulação, teste e justificação de conjeturas.

2.1.2. O desenvolvimento do raciocínio matemático

Vejamos agora como tem sido encarado o desenvolvimento do raciocínio na aprendizagem da Matemática. Por exemplo, para Fischbein (1999), para que exista um desenvolvimento produtivo do raciocínio matemático, os alunos devem aprender Matemática formal e intuitivamente, sublinhando a importância da intuição na aprendizagem desta disciplina. Também Poincaré (1996) vê a intuição como fundamental na produção de conhecimento matemático. Segundo este autor, a intuição atua principalmente de forma inconsciente, sublinhando que este tipo de trabalho é essencial na invenção matemática.

Russel (1999) aponta quatro aspetos do raciocínio matemático que tem lugar nos primeiros anos de aprendizagem da Matemática: (i) o raciocínio matemático é essencialmente justificação e uso de generalizações; (ii) o raciocínio matemático conduz a uma cadeia de conhecimentos num determinado domínio; (iii) o desenvolvimento de uma certa cadeia de compreensões dá origem a uma "memória matemática", por vezes designada por "sentido matemático", e providencia as bases para a resolução de problemas; e (iv) a ênfase no raciocínio matemático na sala de aula constitui o caminho para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Para a mesma autora, desde os primeiros anos de aprendizagem, os alunos devem ser encorajados a expor as suas ideias, para serem verificadas ou refutadas, e analisar e criticar as ideias dos colegas. Embora se tenha feito uma boa análise de um determinado problema, existem com frequência "raciocínios incorretos". Na sua perspetiva, estas situações podem ser úteis para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Assim, defende que a sua análise deve ocorrer na sala de aula, constituindo mais uma oportunidade de exploração e discussão do problema. Ao examinar um “raciocínio incorreto”, seja seu ou de um colega, os alunos beneficiam de mais uma experiência de aprendizagem que os estimula a pensar, envolvendo-se em processos de raciocínio significativos.

Ao investigarem o raciocínio indutivo de doze alunos do ensino secundário num contexto de resolução de problemas, Cañadas e Castro (2007) propõem uma categorização que apresenta sete fases para descrever os processos envolvidos neste tipo de raciocínio: (i) observação de casos particulares; (ii) organização de casos particulares; (iii) procura de padrões e regularidades; (iv) formulação de conjeturas; (v) validação das conjeturas; (vi) generalização das conjeturas; e (vii) justificação das conjeturas generalizadas. Nesta análise, o raciocínio indutivo esteve presente no trabalho de todos os alunos. Estes partiram de casos particulares e tentaram encontrar um padrão geral. No entanto, nem todas as fases do raciocínio indutivo estiveram presentes na resolução das tarefas propostas. Verificou-se, também, que nem todos os alunos seguem as mesmas fases para a resolução da mesma tarefa. Porém, há duas características consideradas pertinentes e que podem ser analisadas em todas as fases, a espontaneidade e o modo de representação (verbal, aritmético, geométrico e algébrico). A justificação das conjeturas formuladas a partir dos padrões encontrados permitiu o processo de generalização de forma mais significativa. Neste processo, a linguagem algébrica esteve presente em todos os casos, razão pela qual as autoras consideram que as atividades de generalização são essenciais para o estudo da Álgebra.

Fonseca (2000) realizou um estudo com dois alunos do 10.º ano de escolaridade, no qual pretendia analisar os processos matemáticos por eles utilizados na realização de tarefas de exploração na aula de Matemática e, também, o discurso envolvido em aulas de investigação. Este estudo deu particular atenção aos seguintes processos: especialização, procura de regularidades, formulação de conjeturas, generalização, verificação, justificação e prova. Os resultados do estudo mostraram que os alunos utilizaram de uma forma idêntica os processos de especialização, procura de regularidades, formulação de conjeturas, verificação e generalização. Para a autora, o processo de formulação de conjeturas é aquele que surge com maior frequência e de uma forma mais espontânea. Os processos de justificação e de demonstração são utilizados de formas distintas e estão menos presentes no trabalho dos alunos. Refere ainda que existem diversos fatores que podem influenciar a utilização de certos processos, nomeadamente a natureza das tarefas, o material disponível, a interação com os colegas e com o professor e os conhecimentos e experiências prévios.

Surge na última década um entendimento mais claro e consensual acerca do que se pretende para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos e orientar o professor nesse caminho. Assim, segundo o documento *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), o raciocínio matemático deve ser desenvolvido dando oportunidades aos alunos de explorar, investigar, representar, conjeturar, explicar e justificar matematicamente. Para este documento, os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático, em particular o raciocínio indutivo e dedutivo, através dos processos de identificação de regularidades, formulação e verificação de conjeturas, generalização, justificação de propriedades, elaboração de cadeias de raciocínio e argumentação em defesa de um processo de resolução e demonstração.

Ainda no NCTM (2007), para que desenvolvam uma compreensão profunda da Matemática, os alunos devem procurar e identificar explicações para os padrões que observam e os procedimentos que utilizam (formulando, investigando e provando conjeturas), bem como generalizar e demonstrar. O raciocínio e a demonstração permitem aos alunos organizar as suas observações e proceder a abstrações, tendo muitas vezes como ponto de partida um raciocínio informal. Também o Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) destaca a importância dos alunos raciocinarem matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Neste documento, o raciocínio matemático, além de ser concebido como um objetivo de aprendizagem central, constitui-se como uma orientação metodológica importante para o professor estruturar as atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Ambos estes documentos apontam o raciocínio matemático como uma capacidade fundamental, que envolve a explicação, a justificação de ideias, a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a demonstração. Os alunos podem começar, desde o início da escolaridade, pela justificação de passos e operações na resolução das tarefas e evoluir gradualmente para argumentações mais complexas, acabando por distinguir e apresentar generalizações, casos particulares e contraexemplos e por reconhecer e usar diferentes métodos de demonstração. Ainda no NCTM (2007, p. 61), também é referido que "o raciocínio matemático é um hábito mental que, como todos os hábitos, deverá ser desenvolvido através da sua utilização consistente numa diversidade de contextos”.

Naturalmente, o professor desempenha um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Em particular, deve propor, frequentemente, a realização de atividades que exijam reflexão, com o intuito de ajudar os alunos a valorizar e a usar o poder do raciocínio matemático. Deve ainda dar atenção aos raciocínios dos alunos e procurar que eles os explicitem com clareza. Através da discussão oral na aula, os alunos podem confrontar as suas estratégias de resolução das tarefas, assim como identificar e discutir os raciocínios elaborados pelos seus colegas. Já através da produção escrita, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais detalhado as suas estratégias e os seus argumentos, reconhecendo a importância do rigor no uso da linguagem matemática.

Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) destacam que, desde os primeiros anos de escolaridade e desde que sejam proporcionadas condições adequadas, os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, isto é, em ambientes apropriados os alunos são:

> (...) capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contraexemplo, de refletir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos. (Boavida *et al*., 2008, p. 81)

Neste sentido, é fundamental proporcionar aos alunos experiências e contextos de aprendizagem em que estes tenham oportunidade para explicar e justificar as suas ideias e resoluções e para formular, testar e provar conjeturas. Tarefas de natureza exploratória e investigativa apresentam-se como contextos privilegiados para este trabalho, mas meros exercícios ou acontecimentos do quotidiano da aula podem constituir-se como pretextos para o professor desafiar os alunos a argumentarem, a confrontarem e a discutirem as suas ideias. O importante é que o raciocínio matemático e, em particular a argumentação, esteja presente, de forma consistente, em qualquer tópico matemático e não fique limitado a situações esporádicas ou a determinado tema matemático.

Procurando nas Metas de Aprendizagem, documento recentemente publicado pelo Ministério de Educação, encontra-se matéria no domínio das capacidades transversais e subdomínio do raciocínio matemático, para o nível do segundo ciclo de escolaridade, tal como se pode ler.

> Justifica e argumenta afirmações matemáticas: explica e justifica os processos matemáticos, resultados e ideias matemáticas, recorrendo a exemplos e contra-exemplos e à análise exaustiva de dados; argumenta processos matemáticos recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Formula e testa conjeturas: analisa situações e formula conjeturas e generalizações (Por exemplo, na exploração de regularidades); testa conjeturas fazendo deduções informais (Por exemplo, através de um contra-exemplo). (Meta 6 e 7, DGIDC, 2010)

O incentivo à justificação desde os primeiros anos promove a progressão entre as justificações simples e informais e as justificações formais, muitas vezes próximas ou mesmo equivalentes a demonstrações. A formalização de justificações pode, assim, conduzir à realização implícita de demonstrações. Contudo, não é expectável que os processos de demonstração sejam desenvolvidos desde os primeiros anos de escolaridade de um modo rigorosamente formal.

No 1.º Ciclo do Ensino Básico, os dois processos essenciais associados ao raciocínio matemático são a justificação e a formulação e teste de conjeturas. Assim, o programa indica que o aluno deve ser capaz de (i) explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos e (ii) formular e testar conjeturas relativas a situações matemáticas simples. Sugere-se, nomeadamente, que o professor pode pedir a explicação de raciocínios matemáticos oralmente e por escrito, solicitar exemplos, contraexemplos e analogias, propor a investigação de regularidades e relações numéricas nas tabuadas e, finalmente, usar as tabuadas para a formulação e teste de conjeturas. No 2.º Ciclo, permite aprofundar a capacidade de raciocínio matemático dos alunos, no que se refere à justificação (recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos) e à formulação e teste de conjeturas (justificando-as com deduções informais). Ao lado destes aspetos, assume agora também um lugar de destaque a argumentação. O programa sugere aos professores a realização de perguntas do tipo “Como fizeste? Porque consideras que o que fizeste está certo? O que acontecerá se...? Isto verificar-se-á sempre?”. Finalmente, no 3.º Ciclo, tal como na justificação se espera uma maior formalidade, também na capacidade de demonstração é expectável um progresso significativo. De acordo com o programa, neste ciclo os alunos devem ser capazes de (i) formular, testar e demonstrar conjeturas; (ii) distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjetura e fazer demonstrações simples; (iii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; (iv) compreender o papel das definições em Matemática; (v) distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; e (vi) selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (PMEB, 2007, p. 64).

Acrescentando Ponte e Sousa (2010, p. 32) "aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando os raciocínios realizados por nós e pelos outros". Assim, para atingir os objetivos indicados é necessário partir de tarefas apropriadas, matematicamente ricas, mas suscetíveis de ser entendidas pelos alunos e, principalmente, manter um discurso que convide à participação, justificação e reflexão por parte dos alunos. O professor deve pedir constantemente a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos ou contraexemplos e aproveitar as oportunidades para levar os alunos a identificar casos particulares, formular generalizações e testar a validade dessas generalizações. Os problemas e as tarefas de investigação constituem um contexto fundamental para o estudo do raciocínio matemático, atendendo aos processos usualmente usados na elaboração e teste de conjeturas e na sua justificação (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). O raciocínio indutivo tem lugar sobretudo na formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos e o dedutivo ocorre principalmente nos processos de justificação.

2.2. Avaliação das aprendizagens

O entendimento da avaliação das aprendizagens reside essencialmente no propósito a que se destina. Para este estudo, o enfoque da avaliação centra-se na avaliação formativa de caráter regulador, envolvendo os alunos no processo de avaliação, para que se tornem mais autónomos nas suas aprendizagens.

2.2.1. Princípios orientadores da avaliação

O Despacho Normativo Nº1/2005 no capítulo um ponto seis evidencia a avaliação das aprendizagens e competências em princípios orientadores desde a alínea a) à alínea f), porém gostava de me centrar na alínea c) que foca a "primazia da avaliação formativa com valorização dos processos de autoavaliação regulada" através da utilização de tarefas adequadas e da discussão dos critérios que compõem uma resposta correta, os professores poderão desenvolver nos seus alunos a aptidão e a capacidade de eles se envolverem na autoavaliação e reflexão do seu próprio trabalho e das ideias formuladas por outros. Também a alínea e) merece particular atenção à "Transparência e rigor do processo de avaliação, nomeadamente através da clarificação e da explicitação dos critérios adotados." Esta alínea traça um enfoque muito claro ao que neste estudo se procura evidenciar, do ponto de vista do avaliado, pois este tem o direito de conhecer, discutir e apropriar-se daquilo que é esperado que ele realize, assim como deve igualmente ter acesso aos indicadores e descritores de desempenhos esperados para que possa refletir sobre o seu trabalho e fazer uma autoavaliação regulada.

Ainda neste despacho, no capítulo dois referente ao processo de avaliação, é referido que a avaliação formativa "é a principal modalidade de avaliação do ensino básico, assume caráter contínuo e sistemático e visa a regulação do ensino e da aprendizagem, recorrendo a uma variedade de instrumentos de recolha de informação, de acordo com a natureza das aprendizagens e dos contextos em que ocorre". Continuando uma breve pesquisa e análise dos atuais documentos curriculares, verifica-se que preconizam uma avaliação ao serviço das aprendizagens dos alunos, em que as formas de avaliação constituem, simultaneamente, situações de aprendizagem e as componentes reguladora e autorreguladora ganham relevo, permitindo a implicação do aluno no processo de avaliação (DGEBS, 1991; DGIDC, 2007). A ênfase atribuída à autoavaliação tem demonstrado possuir impacto na aprendizagem dos alunos (NCTM, 2007).

2.2.2. Orientação para a avaliação no PMEB

É através da avaliação que o professor recolhe a informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, diagnosticar problemas e insuficiências na aprendizagem e no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e ação didática. A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem. Neste contexto, é necessária uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de caráter formativo e regulador. Com este entendimento, a avaliação é um instrumento que faz o balanço entre o estado real das aprendizagens do aluno e aquilo que era esperado, ajudando o professor a tomar decisões ao nível da gestão do programa, sempre na perspetiva de uma melhoria da aprendizagem. Mais especificamente, a avaliação deve ser congruente com o programa, incidindo de modo equilibrado em todos os objetivos curriculares e constituir uma parte integrante do processo de ensino e de aprendizagem. Assim, a avaliação é um processo contínuo, dinâmico e em muitos casos informal. Isto significa que, para além dos momentos e tarefas de avaliação formal, a realização das tarefas do dia-a-dia também permite ao professor recolher informação para avaliar o desempenho dos alunos, ajustar a sua prática de ensino e usar uma diversidade de formas e instrumentos de avaliação. Na medida em que são diversos os objetivos curriculares a avaliar e os modos como os alunos podem evidenciar os seus conhecimentos, capacidades e atitudes, também devem ser diversas as formas e os instrumentos de avaliação. Deve ter predominantemente um propósito formativo, identificando o que os alunos não sabem tendo em vista melhorar a sua aprendizagem, mas valorizando também aquilo que sabem e são capazes de fazer; decorrer num clima de confiança em que os erros e as dificuldades dos alunos são encarados por todos de forma natural como pontos de partida para novas aprendizagens; ser transparente para os alunos e para as suas famílias, baseando-se no estabelecimento de objetivos claros de aprendizagem. Assim, a forma como o professor aprecia o trabalho dos alunos tem de ser clara para todos, nomeadamente as informações que usa para tomar decisões.

O professor deve envolver os alunos no processo de avaliação, auxiliando-os na análise do trabalho que realizam e a tomar decisões para melhorarem a sua aprendizagem. Este procedimento favorece uma visão da avaliação mais propícia à melhoria do ensino e aprendizagem, reforçando as suas potencialidades formativas. A avaliação sumativa destina-se a fazer um julgamento sobre as aprendizagens dos alunos e tem o seu lugar no fim de um período letivo ou no final do ano. Esse julgamento pode traduzir-se numa classificação, qualitativa ou numérica, mas avaliar e classificar são ações muito diferentes. A classificação atribuída aos alunos é um valor numa escala unidimensional enquanto a avaliação formativa implica uma interpretação sobre o grau em que os objetivos foram atingidos e uma tomada de decisão (PMEB, 2007).

2.2.3. Avaliação das aprendizagens com função reguladora

Desde que emergiu o novo paradigma da avaliação, na década de 60 do século XX, que se passou a privilegiar o processo de ensino e de aprendizagem como objeto avaliativo. Esta avaliação exprime-se pela descrição das aprendizagens e das dificuldades que os alunos vão evidenciando ao longo do processo, para que a intervenção pedagógica possibilite que continuem a aprendizagem com sucesso e com a superação das suas dificuldades. Desta forma, a avaliação, para além de sumativa, é, também, formativa e formadora, quer para o aluno, quer para o docente. Para o aluno, porque se procura que tome consciência do seu processo de aprendizagem, através da sua autoavaliação, e intervenha nele autonomamente, de modo a superar dificuldades e erros, ou a continuar a aprendizagem com sucesso. Para o professor a avaliação é formadora, porque o incita a refletir sobre a adequação das estratégias de ensino que utiliza nos percursos de aprendizagem dos diferentes alunos, modificando-as ou procurando novas estratégias, no caso de a avaliação evidenciar dificuldades/erros e diferentes ritmos de aprendizagem nos alunos (Santos, 2002).

Sendo realizada a avaliação formativa para aperfeiçoar, ajudar a melhorar e a reorientar o processo de ensino e de aprendizagem (París, 2006), a sua prática durante o referido processo visa cumprir duas funções principais: proporcionar um feedback descritivo e pormenorizado sobre as aprendizagens dos alunos e as suas dificuldades ou erros e regular o processo. Entende-se por regulação do ensino e da aprendizagem "um processo deliberado e intencional que visa controlar os processos de aprendizagem, para que possa consolidar, desenvolver ou redirecionar essa mesma aprendizagem" (Fernandes, 2005, p. 67). Considera-se que é com a regulação estruturada pela utilização de estratégias de ensino diferenciadas/individualizadas que se criam mais condições pedagógicas promotoras do sucesso escolar, porque estão adequadas às dificuldades/erros e ritmos de aprendizagem dos diferentes alunos. Para que a regulação das aprendizagens se concretize, Allal (2007, p. 8) refere um conjunto de etapas sequenciais a cumprir: "fixar um objetivo e orientar a ação em relação ao mesmo; controlar a realização da ação face a esse objetivo; assegurar um retorno à ação (um feedback, uma retroação); confirmar ou reorientar a trajetória da ação e/ou redefinir o objetivo". É através destas etapas que se pode diagnosticar, no momento em que surgem, os erros e as dificuldades dos alunos e se intervém neles com estratégias e com recursos que permitam aos alunos superá-los, evitando, desta forma, que acumule dificuldades e não atinga o sucesso escolar.

Podemos, por isso, afirmar que a realização de uma avaliação com uma função reguladora do ensino e da aprendizagem implica que a avaliação se centre no processo de aprendizagem; se analise as informações recolhidas, em função de critérios de realização das tarefas; os erros do aluno não sejam punidos, pois fazem parte da aprendizagem (Pinto & Santos, 2006), devendo, pelo contrário, ser objeto de análise para a compreensão do que os motivou e, em função disso, intervir neles adequadamente; que o professor reflita sobre a adequação dos métodos e das estratégias de ensino que utiliza aos percursos de aprendizagem dos diferentes alunos; que o aluno participe na avaliação e na regulação da sua aprendizagem, através da sua autoavaliação regulada (Santos, 2002).

Como está referido no NCTM (2007, p. 23), "a avaliação não deve apenas ser feita *sobre* o aluno, mas também ser feita *para* o aluno, de forma a orientar e aumentar a sua aprendizagem". Deste modo, a regulação da aprendizagem pode ser entendida como "todo o ato intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua diretamente para a progressão e/ou redirecionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77). A implementação de uma avaliação reguladora das aprendizagens pode melhorar o desempenho escolar dos alunos permitindo que detetem os seus erros em tempo útil e fazer a reestruturação do seu processo de aprendizagem. Contribui também para que os alunos tenham conhecimento da fase de desenvolvimento do seu trabalho. A mesma autora considera que um feedback com função reguladora deve (i) ser claro, para que possa ser compreendido, autonomamente, pelo aluno; (ii) apontar pistas de ação futura, que levem o aluno a prosseguir; (iii) incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta; (iv) não incluir a correção do erro, permitindo que o aluno o identifique e corrija e, assim, aconteça uma aprendizagem mais duradoura; e (v) identificar o que está bem feito, para que esse saber seja conscientemente reconhecido e a autoconfiança do aluno seja promovida.

As orientações dadas pelo professor podem ser orais ou escritas e apresentarem-se sob a forma de comentários com sugestões ou questões reflexivas. No entanto, para que estas intervenções contribuam para o desenvolvimento da capacidade de autoavaliação dos alunos, devem acontecer de forma continuada, promovendo uma postura de reflexão e autoquestionamento por parte dos alunos e não incluir juízos de valor sobre o seu desempenho. “A estratégia que escolheste é adequada, mas deves procurar usar uma linguagem menos confusa. Porque não escreves...em vez de...?”; “Experimenta com outros valores e analisa os resultados obtidos. O que concluis?”; “Porque pensaste assim?”; “De onde te surgiu esta ideia?” ou “Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?” são exemplos de intervenções que cumprem esses requisitos (Santos, 2002).

2.2.4. A importância dos critérios de avaliação

A investigação no domínio da avaliação das aprendizagens realizada nos últimos anos tem dado destaque à autoavaliação regulada dos alunos e evidenciado que é quando o aluno avalia a sua aprendizagem e a regula de forma autónoma que mais condições se criam para que os efeitos da regulação sejam melhor conseguidos. Sendo a autoavaliação “o olhar crítico sobre o que se faz, enquanto se faz e/ou depois de se ter feito” (Veiga Simão, 2005, p. 273), a sua prática por parte do aluno pressupõe, segundo Allal (1999), que interiorize os critérios de avaliação da tarefa através da qual vai fazer a aprendizagem. Tendo conhecimento desses critérios de avaliação, o aluno planifica a sua realização de modo a delinear um percurso que possibilite, *a priori*, o seu cumprimento. À medida que vai realizando a tarefa, o aluno, através do exercício de competências metacognitivas, vai autocontrolando o processo de realização da mesma, em função dos critérios de realização dessa tarefa. O autocontrolo realizado pelo exercício das competências metacognitivas consiste no distanciamento do aluno em relação ao que está a fazer na tarefa de aprendizagem e na sua análise crítica (Doly, 1999). Caso verifique que não está a cumprir os critérios de avaliação, ou que está a cometer algum erro, o aluno vai reajustar a forma como está a realizar a tarefa, acrescentando informações, retirando outras, relacionando-as de forma diferente, etc. Depois de concluída a tarefa, o aluno verifica se foi bem sucedido, pela comparação da mesma com os critérios de avaliação que lhe serviram de referência na autoavaliação regulada.

Os critérios de avaliação desempenham um papel central no processo de autoavaliação, uma vez que esta se desenvolve mediante um determinado referencial de padrões, valores ou critérios. Os critérios de realização de uma tarefa permitem que o sujeito compare a sua ação com o que é pretendido e, se necessário, implemente estratégias de correção dessa ação, para obter sucesso na realização da tarefa (Silva, 2004). A apropriação dos critérios de avaliação é, portanto, essencial ao processo de autoavaliação e de autorregulação das aprendizagens e cabe ao professor facilitar essa apropriação pelos alunos. De acordo com Santos (2002), o professor deve começar por definir e explicitar, para si próprio, que critérios considera na avaliação da tarefa em causa e, posteriormente, partilhar esses critérios com os alunos. Esta partilha deve, preferencialmente, envolver os alunos no aperfeiçoamento e/ou completude dos critérios, através de um processo de negociação, e deve ser feita recorrendo a uma linguagem acessível aos alunos, para que possam compreender o que é esperado deles.

Para que o aluno possa assumir um papel verdadeiramente interveniente na sua avaliação, de modo a poder regular a sua própria aprendizagem, é igualmente imperioso que os processos avaliativos sejam transparentes. Saber o que se espera dele, compreender quais os critérios de qualidade de um trabalho e aceitar o erro como um fenómeno natural a todo aquele que aprende são condições essenciais para que o aluno se predisponha e seja capaz de desenvolver uma atividade de autocontrolo refletido que passa pela confrontação entre as ações a desenvolver numa dada tarefa e os critérios de realização (Jorro, 2000).

No contexto escolar, o professor desempenha um papel central neste processo, competindo-lhe implementar estratégias adequadas e propor contextos favoráveis ao desenvolvimento da capacidade de autoavaliação dos alunos. O ambiente de sala de aula deve dar espaço para uma abordagem positiva do erro e para a explicitação/negociação dos critérios de avaliação, utilizando instrumentos alternativos de avaliação que podem ser implementados pelo professor, na prática de uma avaliação formativa, com potencialidades ao nível da autoavaliação dos alunos e, com mais abrangência, da autorregulação das aprendizagens (Santos, 2002).

Como referi na introdução, o cerne deste estudo consiste em adaptar a grelha (anexo I) elaborada pela Comissão de Acompanhamento do Plano de Matemática (PM) II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) ao nível de compreensão dos alunos de 2.º Ciclo de modo a estabelecer critérios de avaliação que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Reformulei a grelha fazendo colidir as componentes do raciocínio matemático com os critérios de avaliação, sendo estes exemplificados aos alunos através da resolução de tarefas de investigação. Aos critérios definidos correspondem níveis de desempenho através de descritores.

Na proposta pedagógica apresentada aos alunos merece particular ênfase a negociação do que se pretendia que os alunos fizessem, tendo em conta a natureza de uma tarefa de investigação. A autoavaliação e a definição dos critérios de avaliação merecem neste trabalho particular atenção, porque ao invés da avaliação sumativa, que é exterior ao processo de ensino e aprendizagem, estando associada à certificação, a avaliação formativa debruça-se sobre os processos e a atividade desenvolvida pelos alunos e visa a melhoria e a regulação do ensino e das aprendizagens (Santos, 2008).

3. CONCRETIZAÇÃO LETIVA

Neste capítulo começo por apresentar e caracterizar as tarefas propostas aos alunos nas aulas de Matemática, a sua realização na sala de aula e o papel do professor na gestão curricular. De seguida, apresento a planificação das tarefas, com destaque para os assuntos matemáticos a tratar, os objetivos de aprendizagem, os materiais e a forma como foram apresentadas à turma.

3.1. Tarefas matemáticas

As tarefas selecionadas e propostas aos alunos visavam: (i) criar contextos de aprendizagem diversificados, (ii) criar uma componente investigativa, (iii) fazer a negociação de significados dos processos de raciocínio matemático, (iv) criar momentos de discussão e reflexão das atividades, (v) envolver os alunos na apropriação dos critérios de avaliação. Esta seleção de tarefas pretende enfatizar, Stein e Smith (1998) em que definem uma tarefa como "um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (p. 1), podendo "envolver vários problemas relacionados ou um trabalho prolongado, sobre um único problema complexo" (p. 1). As autoras referem que tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de modo rotineiro, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem, enquanto as tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões, representam uma oportunidade bem diferente. De igual modo, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) caracteriza uma tarefa de investigação como aquela em que os alunos exploram uma situação aberta, fazem e testam conjeturas, argumentam e comunicam, oralmente ou por escrito, as suas conclusões, como é o caso da proposta pedagógica relatada neste trabalho.

Ponte (2005) considera que exercícios e problemas são tarefas fechadas, distinguindo-as pelo seu grau de desafio – o exercício com desafio reduzido e o problema com desafio elevado. Das cinco tarefas selecionadas três apontam para investigações, sendo por isso de natureza aberta, e com um grau de desafio elevado, coube aos alunos participar na formulação das questões, como refere Ponte (2005), as outras duas apontam para tarefas de exploração, que sendo também abertas apresentam um grau de desafio reduzido.

Como refere Schoenfeld (1996), "problemas bem escolhidos podem envolver os alunos em discussões, levando-os a pensar matematicamente". Também Gravemeijer (2005) recomenda a utilização de problemas contextualizados que levem os alunos a construir modelos que mais tarde se transformam em conceitos. Estas atividades pretendem estabelecer conexões entre o que o aluno já sabe e o que tem que aprender.A aprendizagem da Matemática pode ter, assim, uma forte vertente investigativa, na qual a exploração, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são processos que lhe estão inerentes e que se tornam indispensáveis à sua aprendizagem (Braumann, 2002).

Goldenberg (1999) sugere a utilização de tarefas de investigação na aula de Matemática, levando os alunos a conjeturar, explorar conexões entre vários conceitos e matérias, descobrir processos de resolução e resultados e diversificar atividades. Para este autor importa que o aluno aprenda a ser um investigador perspicaz e, para isso, tem de fazer investigação. Também Santos *et al*. (2002, p.1-2) consideram que um ensino que incida sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado, salientando igualmente que "aprender Matemática" deve consistir, essencialmente, em "fazer Matemática", através de investigações e explorações. De facto, considera-se importante que os alunos tenham oportunidades de fazer Matemática, particularmente através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória, vivendo, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais.

3.2. A realização de tarefas na sala de aula

Stein e Smith (1998) distinguem três fases importantes através das quais passa qualquer tarefa. A primeira é o modo como as tarefas aparecem no currículo ou materiais curriculares; a segunda, o modo como são apresentadas pelo professor; e, por último, como são realizadas pelos alunos. Estes pontos foram tidos em consideração aquando da planificação das aulas, coma preocupação de antecipadamente explorar todas as tarefas selecionadas e antever possíveis questões dos alunos e formular questões para ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades.A experiência profissional indica que, tarefas aparentemente ricas podem ser subaproveitadas e tarefas simples e rotineiras podem ser transformadas em tarefas matematicamente profícuas. Sierpinska & Kilpatrick (1998) mencionam que tão importante como a seleção e tipo de tarefa é também a forma como estas são exploradas na sala de aula.

Para Christiansen e Walter (1986) e também Ponte *et al*. (1998), a realização de uma investigação deve envolver três fases essenciais: (i) a apresentação da tarefa e o modo como o professor a promove; (ii) o desenvolvimento do trabalho pela execução das tarefas pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final da investigação. Esta última fase de reflexão e discussão sobre o trabalho realizado permite o confronto de opiniões e a justificação e a tomada de consciência dos processos seguidos, o que permite afirmar que a aprendizagem não resulta só da atividade, mas também da reflexão sobre a atividade (Bishop & Goffree, 1986; Ponte, 2005).

Christiansen e Walther (1986) referem ainda que os alunos, para além do trabalho individual, devem desenvolver trabalho de grupo, uma vez que a interação entre eles possibilita o confronto de estratégias e de pontos de vista. Também o trabalho em pares tem sido cada vez mais reconhecido como importante na aula de Matemática, uma vez que deste modo os alunos podem trocar impressões e discutir ideias para a concretização da tarefa proposta, proporcionando uma significativa interação entre eles. Estes modos de trabalho decorrem da importância das interações sociais, dada a sua influência no desempenho matemático dos alunos (Moll, 1996).

Ponte *et al.* (1997, p. 94) destacam, do mesmo modo, a importância da diversidade de modos de trabalho da sala de aula:

> Os alunos podem assim participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem. Trata-se de uma forma prática de trabalhar, que não exige, de um modo geral, alterações no espaço físico da sala de aula e que proporciona aos alunos uma certa margem de autonomia. É particularmente adequada quando a tarefa proposta é relativamente estruturada e não exige um elevado nível de concentração individual (p.94)

3.3. O papel do professor na gestão curricular

Um aspeto extremamente relevante em todo o processo de ensino-aprendizagem é o papel do professor. Segundo Christiansen e Walther (1986), o professor deve envolver-se profundamente na seleção e na construção de tarefas, para que estas sejam apropriadas aos objetivos a atingir. Estes autores referem que o envolvimento pessoal do professor na seleção da tarefa é um passo importante na planificação para a sua apresentação na aula, considerando, assim, que a sua função crucial não é motivar os alunos para a atividade numa tarefa selecionada, mas sim selecionar tarefas que motivem os seus alunos para a atividade. Estes autores defendem que são necessárias mudanças no papel e na ação do professor, nomeadamente na importância que dão aos diferentes tipos de atividade (na estratégia aplicada e na sequenciação do processo de ensino) e no seu papel de mediação. Desta forma, o papel do professor deve ser "fornecer a direção e a mediação necessárias, num sentido vigotskiano, para que as crianças, por intermédio dos seus próprios esforços, assumam o controlo completo dos diversos propósitos" (Moll, 1996, p. 10), cabendo-lhe, assim um papel de mediador entre o aluno e as situações de aprendizagem criadas.

O recurso a tarefas de investigação requer adaptações pedagógicas no sentido de estimular o espírito investigativo nos alunos e impõe novas exigências ao professor, pressupondo que haja um certo à-vontade da sua parte para conseguir trabalhar naquilo que Skovsmose (2000) designa por "zona de risco", na qual o grande estímulo é desafiar o grau de incerteza que a caracteriza. As tarefas que o professor propõe devem suscitar a atividade dos alunos e, em cada momento, ele deve avaliar se essa atividade é aceitável ou se é preciso intervir no sentido de a alterar. Outros autores referem igualmente a importância do papel do professor na planificação de tarefas de natureza investigativa. Segundo Ponte *et al*. (1998) é essencial que na seleção das tarefas propostas o professor estabeleça objetivos, de acordo com a especificidade da turma e com o contexto em que surgem na aula. Assim, o professor é "alguém que participa no processo de elaboração do currículo – delineando objetivos, metodologias e estratégias, e reformulando-as em função da sua reflexão sobre a prática" (Ponte *et al*., 1998, p. 17).

As tarefas de investigação podem ser enriquecidas pela utilização de materiais diversificados, por exemplo materiais manipuláveis ou novas tecnologias. Estas tarefas permitem ainda ao professor uma melhor adequação da gestão curricular, uma vez que possibilitam um melhor conhecimento das capacidades e dificuldades dos seus alunos:

> O papel do professor na seleção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental. Ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos. (NCTM, 2007, p. 58)

Existem sempre diversos fatores que influenciam a planificação, porém podem distinguir-se duas estratégias de ensino: o ensino direto e o ensino-aprendizagem exploratório, devendo uma estratégia de ensino envolver diferentes tipos de tarefas, articuladas entre si (Ponte, 2005). Assim, deve ser dada aos alunos a possibilidade de realizarem tarefas de investigação, em contexto de sala de aula, uma vez que estas se revelam uma mais-valia como experiência de aprendizagem:

> As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjeturas, testar conjeturas e procurar argumentos que demonstrem as conjeturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais. (Santos *et al*., 2002, p. 2)

Muitas vezes existem diversas estratégias de ensino potencialmente adequadas ao fim pretendido e à situação concreta. Deste modo, "cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar com confiança e desembaraço cada uma delas" (Ponte *et al*. 1997, p. 95).

3.4. Planificação das tarefas propostas

Por se tratar de uma experiência nova, quer para mim, quer para os alunos, a planificação e escolha das tarefas de investigação constituíram um processo muito delicado. Pesquisei e procurei tarefas de cunho investigativo, essencialmente em brochuras publicadas pela Associação de Professores de Matemática (APM) e em sites da Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Trabalhei-as no sentido de verificar se se enquadravam nas caraterísticas da turma, para que todos os alunos se pudessem apropriar das mesmas e desenvolver uma atividade profícua e com significado para os alunos, como refere Ponte e Sousa (2010) ao destacarem que é necessário "partir de tarefas apropriadas, matematicamente ricas mas suscetíveis de serem entendidas pelos alunos e, principalmente, manter um discurso que convide à participação, justificação e reflexão por parte dos alunos" (p. 32). As tarefas de exploração e as tarefas de investigação são, assim, à partida, apropriadas para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que na sua realização "temos, por um lado, a formulação de conjeturas (sobre um objeto especifico ou genérico), apoiada numa razão e, por outro lado, a definição de uma estratégia de teste de uma conjetura" (Ponte & Sousa, 2010, p. 31).

Na planificação, para além dos objetivos e indicações metodológicas presentes no programa, tive em consideração as orientações curriculares e as sugestões constantes nas brochuras, e também as recomendações do NCTM (2007). Assim, na planificação das cinco tarefas de carácter investigativo, procurei que se enquadrassem em três temas matemáticos considerados no programa: números e operações, álgebra e geometria.

Por um lado, as tarefas propostas visavam proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático, Por outro lado, estas tarefas permitiram criar ambientes de trabalho em grupo, uma vez que a interação entre eles possibilita o confronto de estratégias e de pontos de vista, permitindo ainda, que alunos com fraco desempenho a matemática participem, façam trabalho e não se desmotivem. As situações criadas pretenderam fornecer oportunidades para os alunos desenvolverem as suas potencialidades, escolhendo diferentes estratégias e, ao encorajarem a reflexão, a organização e a comunicação de ideias, estão associadas a alguns dos objetivos essenciais do Currículo Nacional (ME-DEB, 2001). Por outro lado, estas situações procuraram estimular a criatividade e a discussão entre os alunos. Cabe ainda referir, que pretendi que os alunos, apoiados pela professora, elaborassem uma grelha de critérios de avaliação a partir das experiências de trabalho com estas tarefas.

Na seleção das tarefas também foi tido em conta uma sequencialidade de nível de exigência, ou seja, desde o encontrar relações entre objetos, passando pela generalização e por fim uma justificação plausível. Assim, este conjunto de cinco tarefas de natureza investigativa têm como objetivos gerais de aprendizagem, o desenvolvimento da capacidade transversal, raciocínio matemático, como referido no PMEB (DGIDC, 2007, p. 45), "raciocinar matematicamente, formulando e testando conjeturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos". Com a aplicação destas tarefas viso construir com os alunos uma grelha orientadora de critérios de avaliação, com o objetivo que esta os possa ajudar nas diferentes etapas do raciocínio matemático.

O quadro 3.1 apresenta as tarefas selecionadas, os objetivos previstos em cada uma e o modo de trabalho dos alunos.

Quadro 3.1 – Síntese da planificação das tarefas realizadas em sala de aula

Tarefas	Objetivos / Capacidades a desenvolver	Modo de trabalho
1 – Explora a tabuada do onze	Exemplificar uma tarefa de investigação Negociação de significados Início da construção da grelha de critérios de avaliação	Grupos de 3 ou 4 alunos
2 – Exploração com números	Exemplificar o que significa Procurar relações entre os números Aperfeiçoamento da grelha de critérios de avaliação	Díades
3 – Vamos pensar	Mostrar o que é uma generalização Reformulação da grelha de critérios de avaliação	Grupos de 3 ou 4 alunos
4 – A cerca do Faísca	Estabelecer relações entre perímetro e área Revisão da grelha de critérios de avaliação	Díades
5 – Investigando cubos	Encontrar a fórmula do volume do cubo Generalização de uma sequência Finalização da grelha de critérios de avaliação	Grupos de 3 ou 4 alunos

A tarefa 1 (anexo V) procurou ser um suporte exemplificativo do que pode ser uma tarefa de investigação na sala de aula, contribuindo simultaneamente para a negociação de significados do vocabulário matemático: "relações entre os números", "formular conjeturas", "encontrar contraexemplos" e "justificação por escrito". Planifiquei, ainda o início da construção de uma grelha de critérios de avaliação onde constassem as diferentes etapas do raciocínio matemático, para utilizar em futuras tarefas, de modo a permitir o seu uso continuado em tarefas do mesmo âmbito. Após a realização da tarefa um pretendi que os alunos recorressem a ideias que tinham sido trabalhadas para as incluírmos nos descritores da grelha de critérios de avaliação.

Na tarefa 2 (anexo VI), os alunos aprofundaram o significado de "relações entre números", ou seja, identificarem múltiplos, divisores, relações de número par e impar, números primos e números compostos, sequências numéricas, contraexemplos e justificações simples, o que contribuiu, em parte, para a compreensão faseada da utilidade da grelha de critérios de avaliação.

A tarefa três (anexo VII) enquadra-se no tópico “Sequências e Regularidades” e tinha como objetivo levar os alunos a compreender o que significa “termo” e “número de ordem” para encontrarem uma generalização algébrica, contribuindo desta forma para a introdução deste novo vocábulo na grelha de critérios de avaliação.Nas tarefas anteriores, também foi solicitado aos alunos que encontrassem generalizações de um modo informal e por escrito utilizando linguagem natural. Todavia, nesta tarefa há já uma formalização da generalização.

A tarefa 4 (anexo VIII) enquadra-se no tema “Geometria” no tópico “Perímetro/Áreas”. Os conceitos de perímetro e área estão sempre pouco esclarecidos nas aprendizagens dos alunos, desta faixa etária, havendo alguma confusão em os identificar e clarificar, por isso, a quarta tarefa evidência uma relação entre estes conceitos que podem contribuir para melhorar o seu entendimento. Pretendi que os alunos utilizassem o mesmo processo das tarefas anteriores e que recorressem aos critérios de avaliação.

A tarefa 5 (anexo IX) foi enquadrada na introdução do tópico em estudo, “Volumes”. O objetivo foi que os alunos chegassem à fórmula de cálculo do volume do cubo e que simultaneamente desenvolvessem o seu sentido espacial. Coube ainda uma questão aberta onde os alunos puderam investigar relações, formular, testar e justificar conjeturas.

As tarefas foram realizadas por toda a turma em contexto de sala de aula. Os alunos desenvolveram a sua atividade em trabalho de grupo ou de pares. Foi feita a discussão das mesmas em sala de aula, podendo os grupos apresentar as suas conclusões e interagirem com os colegas nas argumentações. O confronto de ideias e as justificações aos colegas dos processos seguidos trouxe à consciência dos alunos pontos de vista que não tinham observado ou pensado. Ainda,todos os alunos apresentaram ideias e sugestões para a construção da grelha de critérios de avaliação, sendo feita várias vezes a sua revisão até encontrarmos a que melhor correspondia ao trabalho que pretendíamos.

Na apresentação e discussão das diferentes explorações, estava previsto que o porta-voz do grupo apresentaria o trabalho. Por sua vez, os restantes alunos acrescentariam as suas estratégias e descobertas, sendo as apresentações orais acompanhadas com possíveis contributos escritos no quadro para clarificação das ideias matemáticas em discussão. Tive ainda a preocupação de proporcionar um ambiente de aprendizagem descontraído e construtivo, em que os alunos se sentissem à vontade para colocar dúvidas e questões, pudessem tomar consciência da evolução das suas aprendizagens e sentirem-se motivados para aprender e "descobrir" a Matemática.

A realização de cada tarefa na de sala de aula de matemática foi prevista para um bloco de 90 minutos, dos quais 50 minutos para a sua realização e os restantes 40 minutos para discussão com toda a turma, onde se inclui a apresentação das conclusões, leitura das justificações dando espaço para argumentação e discussão das ideias entre alunos-alunos e alunos – professora.

Todas estas tarefas tiveram como objetivo primordial mostrar um ponto de partida, aos alunos, para trabalhar uma tarefa de investigação e através das produções construirmos uma grelha de critérios de avaliação com descritores de nível de desempanho. No seu conjunto foram proporcionando um crescendo de significados e compreensão do que se espera que os alunos façam perante um trabalho de investigação matemática.

3.5. Opções metodológicas

Nesta secção pretendo fundamentar e caracterizar a metodologia utilizada, os instrumentos de recolha de dados e os procedimentos da análise de dados, aspetos essenciais para a realização do estudo.

A metodologia usada é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo e seguindo a modalidade de estudo de caso. O objeto de caso é um conjunto de três alunos que formam um grupo de trabalho. Pelo objetivo deste estudo, parece-me adequado inseri-lo no paradigma interpretativo, que se caracteriza pelo "interesse central no significado humano na vida social e na sua elucidação por parte do investigador" (Erickson, 1986, p. 119). Ainda Erickson (1986) identifica como principais campos de interesse para a investigação interpretativa em educação: (i) a natureza da sala de aula como meio organizado para a aprendizagem; (ii) a natureza do ensino como um aspecto do meio da aprendizagem; e (iii) a natureza das perspectivas e dos significados de professores e alunos. Segundo este autor, a investigação interpretativa permite um distanciamento, ao tornar desconhecido aquilo que é familiar e ao explicitar aquilo que está implícito. Deste modo, procuro compreender como os alunos interagem com um documento orientador que segure diferentes níveis de desempenho no desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular uma grelha orientadora de critérios de avaliação, que fornece aos alunos descritores que podem mobilizar para progredir dum raciocínio elementar a um mais elaborado ou sofisticado, em contexto de tarefas de natureza investigativa/ exploratória que privilegiam o raciocínio matemático.

A opção por uma metodologia de natureza qualitativa prende-se com o facto de o estudo apresentar as cinco características indicadas por Bogdan e Biklen (1994) para uma abordagem qualitativa: (i) a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (por ser simultaneamente professora e investigadora observo todas as acções no ambiente natural de sala de aula ou na escola sendo o principal instrumento de recolha de dados); (ii) é descritiva (pretendo descrever os processos usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas, com base nos dados recolhidos que são descritivos, podendo a representação ser símbólica, pictórica ou por palavras); (iii) o investigador interessa-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos (o foco do meu estudo reside na compreensão de processos e não nos resultados); (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva (o meu objetivo não é confirmar hipóteses prévias, mas sim procurar aspetos específicos nos dados recolhidos, relacionando-os e agrupando-os de modo a permitir dar algum contributo para a compreensão do fenómeno em estudo); e (v) é importante conhecer o significado que os participantes atribuem às suas experiências (ao realizar entrevistas pretendo esclarecer os significados que os alunos atribuem às várias etapas da resolução das tarefas propostas, bem como à sua apropriação dos critérios de avaliação).

Segundo Yin (1984), Merrian (1988) e Ponte (2006), o estudo de caso é uma metodologia apropriada quando é colocada uma questão "como" ou "porquê". Para Yin (1994), esta metodologia pode ser usada quando não é claramente evidente a fronteira entre o fenómeno e o contexto e, na verdade, é impossível separar cada aluno do contexto natural de sala de aula, onde se desenrola a experiência de ensino. Além disso, como refere Guimarães, (2003) é uma metodologia recomendável quando a incidência da investigação é um "sistema limitado" (cada aluno está integrado na turma) e se pretende compreender em profundidade uma situação num registo exploratório, mas também descritivo e analítico, e evidenciar os aspectos singulares mais relevantes que a caracterizam (como também acontece neste estudo).

Existindo uma identidade entre a investigadora e a professora que orienta o trabalho dos alunos, posso considerar que se trata de um estudo sobre a minha prática profissional.

Como refere Ponte (2002, p. 12), “a investigação sobre a prática visa resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativo a estes problemas, tendo por referência principal, não a comunidade académica, mas a comunidade profissional”.

Para a investigação decorrer com o mínimo de constrangimentos e limitações e de modo a respeitar os princípios de ordem ética, no início do ano lectivo, apresentei o pedido de autorização à diretora da escola (anexo X), informei a coordenadora do grupo disciplinar de Matemática do meu projeto (anexo XI), assim como os encarregados de educação dos alunos objeto de caso (anexo XII).Pedi ainda autorização aos encarregados de educação dos alunos objeto de caso para a realização das entrevistas (anexo XIII), com a garantia de salvaguarda de anonimato dos seus educandos. Toda a turma realizou e discutiu as tarefas, sendo por isso a sua identidade referida através de pseudónimos.

3.5.1. Instrumentos de recolha de dados

Os estudos de caso qualitativos, usualmente, têm por base dados obtidos através da observação, recolha de documentos e realização de entrevistas (Merriam, 1988). Assim, atendendo à natureza do estudo, os instrumentos devem fornecer informação diversificada que permitam obter uma descrição detalhada e a mais completa possível do objeto de estudo. Deste modo, considero que a diversidade de instrumentos permitiu cruzar informação tornando-se mais enriquecedora e fiável. Assim, para a recolha de dados, optei por utilizar os seguintes instrumentos: (i) observação de aulas, registada em suporte áudio, e na escrita de um diário de bordo (anexo XIV), (ii) entrevistas semiestruturadas aos três alunos selecionados (uma antes do estudo, outra após a análise das produções dos alunos - apenas quando considerei oportuno para compreender as produções dos alunos – e ainda outra acerca da utilidade da grelha de critérios de avaliação nas tarefas de investigação dos alunos) e (iii) recolha documental, nomeadamente o Projeto Educativo do Agrupamento, o Projeto de Território Educativo de Intervenção Prioritária, o Projeto Curricular de Turma e os trabalhos produzidos pelos alunos.

Observação Participante – A observação é um dos instrumentos de recolha de dados mais importantes da investigação qualitativa. Segundo Lüdke e André (2005) é uma ferramenta de trabalho que permite obter informação normalmente inacessível através de outras técnicas. Neste estudo utilizei a observação participante do trabalho realizado na sala de aula, porque fui circulando pela sala, observando os processos utilizados, as estratégias e as dificuldades que os alunos apresentavam, na resolução das tarefas, além de ir esclarecendo e colaborando nas eventuais dúvidas dos alunos. Também contribuí com sugestões e ideias para a construção da grelha de critérios de avaliação.

No início tinha pensado registar algumas observações, em tempo real, que fossem significativas para o estudo em causa, contudo tive muita dificuldade, não sendo mesmo possível, porque desempenhar simultaneamente o papel de professora e de investigadora, não me permitia observar atentamente e registar no momento as várias situações da aula, assim como, o trabalho dos grupos. Também Bogdan e Biklen (1994) compartilham da mesma opinião salientando que "a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode também surgir como particularmente difícil" (p. 127). Desta forma, o registo áudio revelou-se um poderoso instrumento permitindo registar situações que, por algum motivo, não foram observáveis tais como, interações entre e fora dos grupos aquando da resolução das tarefas. Após cada aula, tentei descrever os episódios, mais significativos da aula, o mais pormenorizadamente possível, no diário de bordo. A partir da segunda tarefa houve dois gravadores de áudio na sala de aula, um para a turma em geral e outro na mesa de trabalho dos alunos objeto de caso.

Entrevista – Tendo em vista o objetivo do estudo, o recurso às entrevistas pareceu-me adequado, sendo que é uma das fontes de informação mais importantes para um estudo de natureza qualitativa (Yin, 1984). Este instrumento é utilizado "para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). A entrevista permite obter informação em relação aos aspetos não diretamente observáveis de uma dada situação e constitui uma fonte de dados que permite compreender melhor os processos e raciocínios efetuados pelos alunos.

Dependendo do problema formulado e do objetivo da entrevista, esta pode ser mais ou menos estruturada. Deste modo, as entrevistas, no presente estudo, têm um carácter semiestruturado, foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. As primeiras tiveram como objetivo compreender o significado que os três alunos seleccionados atribuem à Matemática no seu quotidiano e ainda inferir acerca das suas preferências em relação à disciplina. Considerei assim, que seria uma boa forma de caraterizar os alunos – primeira parte da entrevista – e não menos importante ter uma perceção geral sobre o conhecimento ou ideia que os alunos têm sobre o raciocínio matemático – segunda parte da entrevista (anexo IV). Estas entrevistas forneceram informações que não são facilmente disponíveis através de outras fontes; dando uma visão profunda das experiências dos alunos, e permitindo que o professor entenda os significados que os alunos dão às situações.

As entrevistas foram realizadas num ambiente descontraído, numa sala de aula, na escola, e estabeleceu-se uma relação de confiança. Expliquei aos alunos que não estava interessada em saber se a sua resposta estava certa ou errada, mas sim em perceber como era obtida a resposta. Posteriormente, quando realizei a última entrevista que tinha como objetivo compreender a utilidade da grelha de critérios de avaliação, expliquei aos alunos que aqui o que era importante seria a honestidade. Para esta entrevista realizei um guião (anexo XV) cujo objetivo era perceber se os alunos tinham utilizado a grelha, como e em que fases. Através desta entrevista semiestrutura pretendi inferir as respostas para as questões do estudo. Analisando a adequação deste tipo de entrevistas ao meu estudo, penso que as entrevistas semiestruturadas podem fornecer uma visão detalhada e profunda das experiências dos alunos e um conhecimento das estratégias que utilizaram, o que poderá contribuir de forma significativa para o meu propósito de compreender os processos usados por alunos do sexto ano de escolaridade em tarefas de investigação/exploração, apoiados por uma grelha de critérios de avaliação sobre raciocínio matemático.

Recolha documental – Documentos de diversa natureza serviram de suporte a este estudo. Para a caracterização da escola recorri ao Projeto de Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP) e ao Projeto Educativo de Agrupamento (PEA). Para caraterização da turma consultei o Projeto Curricular de Turma (PCT) e fichas biográficas dos alunos. Estas permitiram também a caracterização mais detalhada dos alunos selecionados. Para a análise dos processos de raciocínio utilizados pelos alunos durante a aplicação das tarefas, tomei como base os trabalhos produzidos pelos alunos.
A recolha de dados ocorreu no 1.º, 2.º e início do 3.º período, do ano letivo 2011/2012.

Análise de dados – Foi feita em três fases (Merrian, 1988): (i) redução de dados; (ii) apresentação de dados; e (iii) a interpretação e verificação.O processo de análise de dados foi iniciado na sequência das primeiras entrevistas, visando sobretudo perceber qual o significado que os alunos atribuem ao termo raciocínio matemático, ou seja, quando o professor lhes pede que expliquem os seus raciocínios o que pensam que têm de fazer, ou de que forma o podem fazer. Segundo Merriam (1988), na investigação qualitativa, a análise dos dados começa com frequência no primeiro momento de recolha de dados. Pela natureza do estudo, a análise de dados assumiu um caráter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspetiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas. Considerando o objetivo deste estudo e tendo em conta alguns aspetos da revisão de literatura, considerei as seguintes categorias de análise: (i) estabelecimento de relações entre objetos (analisando aspetos das produções dos alunos, a forma de comunicar (representações pictóricas, explicações escritas em linguagem matemática ou natural); (ii) aplicação das etapas do processo de raciocínio definidas na grelha de critérios de avaliação (analisando as respostas obtidas e eventuais dificuldades); e (iii) explicação, e justificação de conjeturas.

3.6. Descrição das aulas

Tarefa 1 – Explora a tabuada do onze

Esta tarefa enquadra-se no tema Números e Operações e tem como objetivo fazer a negociação de significados de palavras que os alunos desconhecem, não sabendo por isso, interpretar e dar significado a "Encontra relações", "Formula Conjeturas", "Testa a Validade", e "Contraexemplos". E ainda, exemplificar uma tarefa de natureza investigativa e construir uma grelha orientadora de critérios de avaliação, a qual fomos completando à medida que trabalhávamos a tarefa.

O enunciado da tarefa foi apresentado por escrito no quadro e fui explicando oralmente a atividade que os alunos teriam que desenvolver. Trabalharam em grupos de três a quatro alunos durante quarenta e cinco minutos, podendo utilizar a calculadora para que pudessem prolongar a tabuada sem se desmotivarem. Todos os grupos seguiram a mesma estratégia de trabalho, apresentando o prolongamento da tabuada pelo menos até ao número quinze, com uma sucessão contínua de fatores.

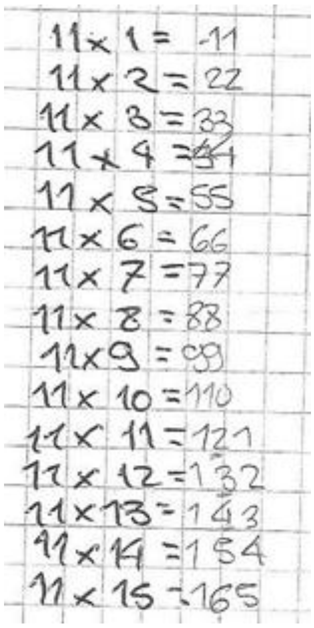


Figura 3.1 – Produção dos alunos

Depois de fazerem o prolongamento da tabuada a maioria dos grupos parou e solicitou a minha ajuda para perguntar: "*Agora o que fazemos?"* Comecei por sugerir que observassem os produtos e verificassem o que estava a acontecer, se viam algo curioso, que se repete, ao que alguns alunos começaram a participar:

> **Inês:** Os dois números são sempre iguais.
> **Professora:** Quais números?
> **Duarte:** Nos produtos.
> **Professora:** Estes números pertencem a uma ordem. (Recordo com o grupo turma o nome das ordens e das classes dos números)
> **Duarte:** Então, o algarismo das unidades e o algarismo das dezenas são iguais.
> **Professora**: Isso acontece sempre?
> **Carolina**: A partir do 10 não. Agora aparece o algarismo das centenas que é sempre 1 e os dois algarismos seguintes já não são iguais.
> **Professora**: Muito bem, então vamos escrever pequenas frases que possam traduzir a primeira ideia que surgiu.

Este pequeno diálogo com a turma serviu para exemplificar que temos de ser rigorosos na comunicação matemática e que devemos utilizar, tanto quanto possível, linguagem matemática nas explicações e justificações.

De seguida outra aluna comenta:

> **Catarina:** Professora, há aqui uma repetição, vai sempre do zero ao nove.
> **Professora:** Catarina, isso está correto mas tenta dizer aplicando uma linguagem matemática.
> **Alunos:** Ah! Pois é, pois é. Se multiplicássemos 11x0 era 0 e isso repete-se sempre.
> **Professora:** Catarina! Vamos lá. (Aluna tenta organizar as ideias para responder).
> **Catarina:** O algarismo das unidades vai do zero ao nove e é sempre assim.
> **Duarte:** É uma regularidade.

O conceito de regularidade já tinha sido trabalhado no 5º ano em tarefas com sequências algébricas, embora no presente ano letivo ainda não tivesse sido referido, o Duarte recordou-o e a sua intervenção contribuiu para ajudar os colegas a recordarem as tarefas que tinham realizado no ano anterior. Depois deste episódio, reforcei que estas ideias, curiosidades, algumas relações numéricas que encontravam deveriam ser registadas no caderno, e tentarem escrever frases aplicando linguagem matemática. Um elevado grupo de alunos referiu quase em simultâneo:

> **Marco:** Não sei como escrevo o que estou a ver.
> **Wilson:** Não sabemos escrever aquilo que somos capazes de dizer.
> **Miguel:** Não sabemos os nomes.
> **Jéssica:** As conjeturas, onde estão?

Foi necessário fazer um ponto de situação e acalmar os alunos pedindo para tentarem escrever o que me estavam a dizer oralmente. Garanti-lhes que posteriormente faríamos em conjunto os registos corretos por escrito, mas que nesta fase eles teriam que tentar. Relativamente às conjeturas fui explicando que quando estamos a prolongar a tarefa já estamos a procurar conjeturas, ou seja, estamos a procurar *o que acontece se* multiplicar 11x11, 11x12, etc...estamos *a levantar suspeitas* para daí tirar conclusões.

Fui passando pelos grupos e apoiando na forma como deveriam apresentar as conclusões. Os alunos estavam muito inseguros porque não havia uma solução a apresentar e começaram a aperceber-se que os diferentes grupos encontravam diferentes ideias e começam a falar baixinho para que os outros grupos não as ouvissem, sendo assim as suas as únicas. Houve, assim vários desempenhos dos grupos, uns com propostas simples e outros com propostas interessantes.A maior dificuldade dos alunos passou por escrever as observações que iam fazendo para o papel. Foram poucos os grupos que conseguiram elaborar frases que traduzissem o seu pensamento. O caso do grupo do Duarte, João e Rute é uma das excepções (figura 3.2).

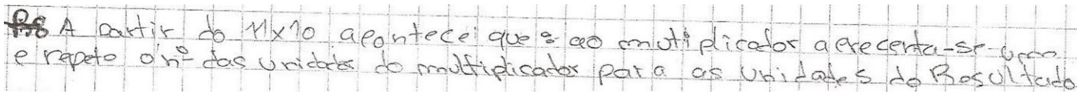

~~R:~~ A partir do 11x10 acontece que a ao multiplicador acrecenta-se um e repeto o nº das unidades do multiplicador para as unidades do Resultado

Figura 3.2 – Conclusão elaborada pelo Duarte, João e Rute

Os restantes grupos fizerem uns apontamentos que evidenciavam as suas ideias, não conseguindo elaborar frases completas ou justificações dos seus raciocínios. O exemplo da figura 3.2 foi discutido na aula no sentido de aperfeiçoarmos a frase, para que ficasse mais clara para os alunos, tendo em conta a ideia que lhe estava subjacente, porque muitos dos alunos não conseguiram decifrar o que os colegas tinham expressado.

A fase da discussão e reflexão foi apresentada por um elemento de cada grupo, por sua vez. Liam o que tinham escrito e em conjunto com toda a turma, aperfeiçoávamos a frase, no sentido de a redigirmos utilizando termos matemáticos, e para que ficasse entendível para todos os leitores. Posteriormente, as frases ficavam escritas no quadro para que todos as registassem. Procurei que os alunos compreendessem que têm que utilizar terminologia matemática nos relatórios escritos. Nesta tarefa foram apresentadas as relações entre os números, algumas conjeturas, a sua validação, casos particulares, contraexemplos e justificações.

Após 90 minutos da concretização desta tarefa, na aula, seguiram-se 90 minutos de Estudo Acompanhado. Os alunos ainda estavam entusiasmados e queriam continuar o trabalho de grupo e tentar procurar "*mais curiosidades".* Realizaram e escreveram mais algumas ideias, e seguidamente, desafiei-os a construir comigo a grelha de critérios de avaliação que os pudesse orientar neste tipo de tarefas. Expliquei-lhes oralmente porque lhe chamava uma grelha de critérios de avaliação e qual o seu objetivo, ao qual os alunos aceitaram e verbalizaram que seria muito útil, porque como afirmou o João: "Estas tarefas não têm perguntas, por isso precisamos de uma orientação para sabermos o que havemos de fazer primeiro".

Projetei a grelha de critérios de avaliação (quadro 3.2) e com ajuda dos alunos fomos registando os passos a percorrer para que pudessem evoluir até atingir o nível 3, nível de melhor desempenho, dando como exemplo o trabalho realizado na tabuada dos onze.

Assim, os alunos visualizaram, pela primeira vez este instrumento de trabalho e constaram qual a sua aplicação prática, comentando uma das alunas: "*é muito giro parece um jogo e à medida que vamos melhorando vamos subindo de nível, como nos jogos da net*".

Quadro 3.2 – Estrutura da grelha de critérios de avaliação apresentada aos alunos

Etapas do processo de raciocínio matemático	**Nível 1**	**Nível 2**	**Nível 3**
Encontra relações entre os números			
Formula conjeturas			
Mostra contraexemplos			
Justifica a validade das conjeturas			
Argumentação			

Ancorando-nos na tabuada do onze, fomos desenvolvendo ideias que pudessem servir como descritores das diferentes etapas. Assim, a partir dos exemplos que tinham estado a trabalhar, os alunos elaboraram os descritores com pequenas frases adequadas a cada nível e a cada etapa. Foi o caso do Duarte que afirmou "quando procurámos 11x13, 11x15, por exemplo, são casos que devem ir para as conjeturas simples".

Foram necessários os 90 minutos seguintes de Estudo Acompanhado para completar o instrumento com os descritores (quadro 3.3), envolvendo negociação de significados que permitissem a completa compreensão de cada um dos critérios. Deixámos a argumentação em branco porque os alunos não tinham ideia de como a poderiam utilizar em matemática. Entendi que a justificação matemática poderia fazer mais sentido para os alunos deste nível de ensino e assim, concordei que ficasse em branco. Depois deste trabalho, a grelha aceite por todos foi a que se apresenta no quadro 3.3.

Quadro 3.3 – Primeira versão da grelha de critérios de avaliação construída na aula

Etapas do processo de raciocínio matemático	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Encontra relações entre os números	Encontra poucas	Encontra algumas	Encontra muitas
Formula conjeturas	Procura conjeturas simples	Procura casos particulares	Formula conjetura geral
Mostra contraexemplos	Não testa	Testa de forma adequada	Testa e prova a validade
Justifica a validade das conjeturas	Utiliza com pouco rigor, ou seja, não passa a mensagem de forma adequada	Utiliza a linguagem matemática com algum rigor	Utiliza linguagem matemática adequada
Argumentação			

Foi um avanço significativo para este estudo conseguir que os alunos participassem na construção desta grelha dando-lhes, nesta fase algum significado e compreendendo a sua aplicação no trabalho com tarefas de investigação.

Tarefa 2 – Exploração com números

A segunda tarefa foi pensada para dar continuidade ao trabalho iniciado com a tabuada dos onze, contribuindo para verificar se os alunos já se tinham apropriado do modo de resolver uma tarefa de investigação. Assim, iniciei a aula apresentando a tarefa aos alunos, como sendo uma tarefa de exploração matemática, e informando-os que o trabalho seria realizado de forma semelhante ao que tínhamos feito para a exploração da tabuada dos onze. Enquanto distribuía a ficha de trabalho, fui informando que deveria ser realizada em díades e que tinham 45 minutos para a explorar. Disse-lhes ainda, que era importante que registassem "muito bem" as relações que encontrassem entre os números e o modo como pensavam para evitar que na discussão em turma, quando solicitados a explicar, não respondessem que já não se lembravam de como tinham pensado.

Como só distribui uma ficha de trabalho por díade, os alunos iniciaram o trabalho copiando o enunciado para o caderno diário. Passados alguns minutos começaram as questões: “Stora é para fazer o quê?”; “Continuamos a sequência?”. Tinham passado três semanas desde a realização da primeira tarefa, que tinha servido de modelo, por isso reconsiderei e li o enunciado recordando que gostava que com os números apresentados e com a disposição que apresentavam, encontrassem curiosidades, relações, regularidades, conjeturas, contraexemplos, tal como tinham feito na tarefa anterior. Enquanto isto, já alguns alunos estavam entusiasmados afirmando:

> **Duarte:** Stora, stora já encontrámos uma sequência.
> **Jéssica:** Nós vimos que na primeira coluna os números “andam” de 4 em 4.”
> **Duarte:** Isto é uma regularidade. Podemos escrever isso?
> **Professora:** Claro, é isso que se pretende.

Voltei a repetir que queria ver o registo escrito e não queria que dissessem mais nada em voz alta, para deixar que outros colegas também sentissem o prazer da descoberta. Contudo, a afirmação do Duarte foi o “pontapé” de arranque para que todos os alunos se envolvessem na atividade com interesse e curiosidade.

De seguida, fui distribuindo a folha com a grelha de critérios de avaliação que tínhamos construído aquando da primeira tarefa e dizendo para olharem para a grelha para ver se os ajudava naquilo que teriam de fazer e, simultaneamente, avaliando o trabalho realizado pelos níveis como tínhamos combinado. Fui, ainda passando pelas díades para me aperceber das dificuldades que os alunos sentiam e dialoguei com eles procurando ajudá-los através do questionamento: “Já encontraram uma regularidade? Será essa a única? Observem os números em linha, em coluna e em diagonal. Pensem em tipos de números que conhecem" (diário de bordo 2).

Os 45 minutos não chegaram para a troca de ideias entre os pares e consequentes registos escritos. Reparei que alguns alunos estavam sempre a apagar os registos. Questionei-os acerca disso, e responderam quase em uníssono “porque aquilo que estamos a pensar é muito difícil de escrever”. Uma aluna disse: “Quando vou ler o que escrevemos não é aquilo em que pensámos". Outra explicou: “Parece que a frase não é bem construída, não sei... Isto é muito difícil, é mais fácil dizer do que escrever”. Ainda assim, reforcei que era preciso escreverem todas as ideias.

Percebi que os alunos não valorizaram a grelha de critérios de avaliação que tinham em cima da carteira. Estavam empenhados apenas nas relações que poderiam encontrar e com uma preocupação desmedida na construção das frases de forma a serem entendíveis. Encontrei um par de alunos que falava baixinho e apontava para a grelha de critérios de avaliação. Então, abeirei-me deles para tentar perceber o que estavam a dizer.

> **Duarte:** Professora, precisávamos de encontrar um contraexemplo ou ver se conseguíamos uma conjetura geral para termos nível 3...
> **Professora:** Acho uma excelente ideia.
> **Duarte:** Não diga nada a ninguém!

Os alunos foram fazendo os seus registos, notando-se que tinham a preocupação de escrever uma conclusão que traduzisse o seu pensamento.

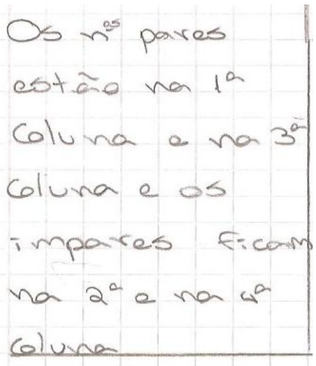


Figura 3.3 – Registos da Catarina e da Carolina

Dei por concluída a tarefa aos 60 minutos de aula e os restantes 30 minutos foram para lermos e interpretarmos as conclusões que os alunos haviam registado. Primeiramente, fui dando voz aos alunos que tinham encontrado menos relações, e aos alunos mais fracos para que lessem o que tinham escrito. Os colegas escutavam com atenção e iam afirmando “Também temos essa”. À medida que surgiam conclusões mais sofisticadas ou que não eram entendíveis por todos, esse aluno foi ao quadro escrever a conclusão e explicar aos colegas como tinham pensado. Foi importante constatar que alguns alunos comentavam: "Ah! Não tinha pensado nisso”. E escreviam no seu caderno a conclusão do colega.

Finalmente, questionei os alunos sobre a grelha de critérios de avaliação e se tinha desempenhado algum papel na fase de realização da tarefa. Alguns alunos responderam que não tinham utilizado. Outros afirmaram que no início não, mas depois começaram a ler os processos e a tentar fazer a avaliação do trabalho e que, por exemplo no “*encontra relações*, achamos que é de nível 3 porque encontrámos muitas, na *generalização* não conseguimos nada por isso ficou em branco e nas *justificações* o trabalho é de nível 2 porque temos muita dificuldade em explicar o nosso raciocínio”.Referi que teríamos que voltar à grelha para percebermos como a poderíamos utilizar nesta tarefa e aperfeiçoá-la ou modificá-la, desde que fosse ao encontro do que já sabemos que temos de fazer neste tipo de tarefas.

Quando os alunos entraram na sala de aula para Estudo Acompanhado já estava projetada no quadro a grelha de critérios de avaliação ao que os alunos intuíram que iríamos trabalhar no entendimento e reformulação da grelha. Pretendia que os alunos dessem os seus contributos logo após a realização da tarefa, para melhor a compreenderem e procedermos a possíveis reajustes. O Duarte considerou que deveríamos cortar o “Encontra poucas”, Encontra algumas” e “Encontra muitas”, justificando: "Professora, podemos encontrar poucas relações mas serem de qualidade e encontrar muitas e serem básicas, simples".Reforcei a opinião do aluno e a turma considerou que estava correto e que na etapa *encontra relações entre números,* os descritores poderiam ser "sabe relacionar os números", considerando para este nível, os números pares e ímpares, sequências de cresce ou decresce, dobros, triplos. Para *conhece conceitos e sabe aplicá-los,* pensaram em múltiplos, divisores, números primos, compostos, potências e regularidades simples. Para *reconhece operações que se podem utilizar com os números*, pensaram em operações, como o exemplo que a Carolina e a Catarina mostraram na figura 3.4.

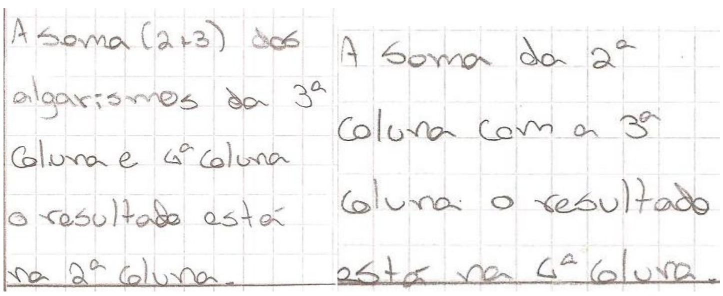


Figura 3.4 – Registos da Catarina e da Carolina

A partir da explicação das alunas pormenorizando a estratégia que estava inerente à conclusão, os colegas consideraram que estas seriam uma relação de nível 3 porque já envolve operações, embora sejam simples. Desta forma a grelha ficou reformulada como indicada no quadro 3.4.

Quadro 3.4 – Segunda versão da grelha de critérios de avaliação construída na aula

Etapas do processo de raciocínio matemático	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Encontra relações entre os números	Encontra ~~poucas~~ Sabe relacionar os números	Encontra ~~algumas~~ Conhece conceitos e sabe aplicá-los	~~Encontra~~ muitas Reconhece operações que se podem utilizar com os números
Formula conjeturas	Formula conjetura simples	Formula conjeturas para casos particulares	Formula conjetura geral
Mostra contraexemplos	Não testa	Testa com estratégia adequada	Testa e prova a validade
Justifica a validade das conjeturas	Utiliza com pouco rigor, ou seja, não passa a mensagem de forma adequada	Utiliza a linguagem matemática com algum rigor	Utiliza linguagem matemática adequada
Argumentação			

Na fase da discussão/reflexão, relativa aos descritores dos critérios, os alunos começam a mostrar vontade de perceber o que significa "utiliza linguagem matemática adequada". Não houve consenso entre os pares, por isso expliquei que ficaria estabelecido que para o critério "justifica a validade das conjeturas" de nível 3 poderiam apresentar conclusões escritas que evidenciassem a forma como pensaram utilizando termos matemáticos corretos (linguagem natural) ou que poderiam utilizar esquemas, desenhos, tabelas e ainda linguagem simbólica matemática.

Tarefa 3 – Vamos pensar

Dei início à aula explicando aos alunos que iríamos trabalhar uma tarefa de exploração, uma vez que tem questões orientadoras e que o objetivo seria levar os alunos a chegar ao termo geral de uma sequência, situação que os alunos nunca tinham abordado. Os alunos ficaram entusiasmados e rapidamente se começaram a movimentar para constituírem os grupos. Nesta tarefa, os três alunos selecionados trabalharam em conjunto. Distribui as fichas de trabalho pelos grupos, dando ênfase à necessidade de atenção durante o trabalho e à importância de saber explicar como pensaram e de escrever muito bem as suas justificações.

Os alunos iniciaram o trabalho de imediato. Ao fazer uma ronda pelos grupos rapidamente percebi que na questão 1.1 não tinha havido dificuldades em elaborar representações icónicas (figura 3.5).

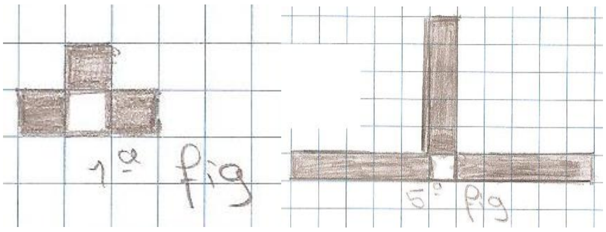


Figura 3.5 – Produção dos alunos

Entretanto fui distribuindo o instrumento com os critérios de avaliação e mencionando que o trabalho era para ser desenvolvido com o apoio dos passos referidos na grelha.

Pelo facto de a tarefa ter várias alíneas, por isso uma sequência de passos a seguir, percebi que os alunos estavam centrados na resolução dessas alíneas deixando para segundo plano a grelha de critérios de avaliação.

À medida que o trabalho foi decorrendo foram surgindo dúvidas, na alínea 1.3:

> **Catarina:** Como é que escrevemos professora? Nós sabemos resolver isto, e sabemos dizer oralmente, mas não conseguimos explicar a escrever.
> **Professora:** Vamos lá tentar! Escrevam aquilo em que estão a pensar.

Acontece que quase todos os grupos pararam na alínea 1.3. Então solicitei a um dos grupos para explicar oralmente porque tinham desenhado a figura 5 com aquele número e quadradinhos e não com outro número qualquer. Os restantes grupos ouviram e concordaram com a explicação do colega.

> **Professora:** Muito bem. Agora, escrevam isso que acabaram de ouvir. (Ao que um aluno começou por desenvolver a frase.)
> **Duarte:** As figuras têm o número de quadrados pintados do número da figura. (Pedi ao aluno para vir escrever esta frase no quadro e que todos verificassem se esta frase estava de acordo com aquilo que estavam a pensar e que tinham desenhado.)

Rute: Não está totalmente correta...O número de quadrados pintados é, por exemplo, na figura 5, cinco para a direita, cinco para a esquerda e cinco para cima, por isso são ao todo quinze pintados e um branco.
Professora: Muito bem. Isso já ajuda muito na explicação. Vamos lá pensar como vamos escrever essa frase que possa traduzir essa ideia com linguagem matemática.
David: Já sei! Já sei!..É sempre três vezes o número da figura.
Professora: Está ainda melhor, mas em linguagem matemática o que é 3 vezes? Quero uma frase escrita... vamos lá, todos a fazer!

Desta forma, os alunos foram escrevendo a sua frase, uns escreveram “3 vezes”, outros já aplicaram a palavra “triplo”. Nesta fase, pedi que os alunos reparassem na grelha de critérios de avaliação e percebessem em que etapa do processo estavam a trabalhar, ao que responderam que era na justificação. Com este exemplo, solicitei que iríamos ler duas ou três frases e perceber em que nível a colocaríamos. Assim, os alunos perceberam que a frase que incluía: "o triplo da figura correspondente" era a melhor elaborada matematicamente, e por isso deveria de ser de nível 3, enquanto outras se ficaram pelo nível 1 ou 2. Foi uma das estratégias encontradas para os alunos perceberem a utilidade da grelha e de como poderiam evoluir para atingir o nível 3.

Na alínea 1.4 os alunos consideraram que esta questão era igual à anterior, ao que concordei, no momento, que deveria de ter construído a alínea de outra forma porque a minha intenção era que construíssem uma tabela com duas colunas, a primeira para o número da figura e a segunda para o número de quadrados de cada figura. Exemplifiquei, fazendo a tabela no quadro. Contudo, expliquei que a 1.3 era diferente da 1.4 porque a primeira pede para explicarem o número de quadrados da 1ª e da 5ª figura e que a 1.4 pede para explicar o número de quadrados de qualquer figura. Solicitei, que fizessem a tabela e que a fossem construindo e observando o número de quadrados do termo. Os alunos iniciaram o seu trabalho. Alguns ficaram na figura cinco, outros prolongaram-na, mas sem fazerem qualquer comentário.
Então, lancei a questão à turma:

Professora: Vamos lá...Como explicaríamos a alguém a forma de calcular o número de quadradinhos de qualquer figura?
Márcio: Dizíamos para observarem a tabela.
Professora: Temos de tirar daí uma conclusão e é preciso escrevê-la.
Luís: Oh. stora! É como a anterior, o número de quadradinhos é o número da figura vezes 3 mais o quadradinho original.
Professora: Essa é a ideia, mas essa frase não exprime corretamente o que a pergunta pede.
Professora: Temos que começar a frase por “Para calcular o número de quadradinhos de qualquer figura..."

Escrevi este início da frase no quadro e sublinhei a palavra qualquer, e fui perguntando qual o número de quadradinhos para a figura dez, depois para a figura quinze, e depois para a figura 23. Os alunos foram fazendo os cálculos e respondendo. De seguida, perguntei-lhes: "Então para qualquer figura como poderíamos dizer?". Depois de várias tentativas chegámos à melhor:

> **Duarte:** É sempre o triplo do número da figura mais um.
> **Professora:** Muito bem. Agora se pedir para a figura 100, quantos quadradinhos são? E para a figura 1000?
> **Professora:** Quando começamos a levantar hipóteses, suspeitas, o que estamos a fazer? Olhem para a grelha de critérios de avaliação.
> **Duarte**: Já sei! Conjeturas.
> **Professora:** Isso. então vá!
> **João:** Oh! Professora, também está aqui na 1.5?
> **Professora:** Pois está e é isso que vamos fazer agora. Escolham vocês números de figuras e mostrem quantos quadradinhos vão obter.

Este procedimento foi rápido e entusiasmante porque os alunos estavam a sentirem-se desafiados no cálculo do número total de quadrados para o número de uma figura desconhecida. Depois de ouvirmos alguns exemplos que os alunos foram verbalizando, escrevi no quadro “3x**?** + 1” e perguntei:

> **Professora:** Este ponto de interrogação corresponde a quê? Ao que será?
> **João**: Ao número da figura stora.
> **Professora:** Muito bem. A esta expressão 3xn+1 chamamos em linguagem simbólica matemática, termo geral. Esta expressão traduz o vosso pensamento?
> **Duarte:** Sim.
> **Professora:** Então, parece que conseguimos chegar ao termo geral ou generalização. Se olharmos para a grelha de critérios de avaliação, verifiquem que já usámos justificações, conjeturas, termo geral. Falta-nos tentar verificar se existem relações nesta tarefa ou a partir da tabela que construímos. Vamos ver se encontramos algumas?

Nesta aula não houve a fase de discussão final pelo facto de que à medida que se iam resolvendo as alíneas íamos em simultâneo fazendo a sua discussão para avançarmos para a seguinte, ou seja, a fase de discussão acabou por ser diluída ao longo da atividade dos alunos. Verificámos algumas relações a partir da tabela construída na aula de Estudo Acompanhado que ocorreu após o intervalo. Nesta aula não houve reformulação da grelha de critérios de avaliação, porque o descritor *formula conjetura geral* já existia, mas mesmo assim os alunos verificaram o exemplo prático do significado do termo.

Tarefa 4 – A cerca do Faísca

Em abril iniciámos o estudo da Geometria no tópico de áreas e volumes. Considerei pertinente iniciar o tema com uma tarefa de investigação como esta, na qual poderíamos recordar os conceitos de área e perímetro de figuras geométricas.

Escrevi a tarefa no quadro e dei algum tempo para os alunos a escreverem no seu caderno diário. De seguida, fui apresentando a tarefa como um trabalho de pesquisa e que iria ser realizado a pares.

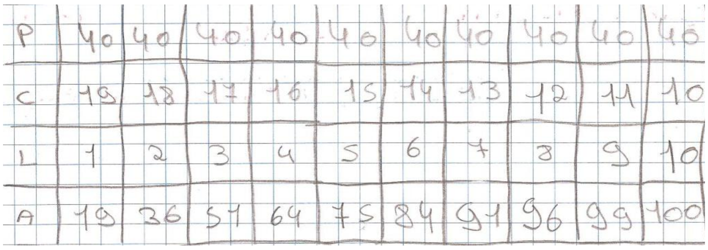
Passados alguns minutos começaram as questões e houve uma aluna que baixinho dizia: "Mas como é que faço se só tenho o número 40?" (Patrícia). O João pega na dúvida da colega e responde-lhe com um exemplo:

> **João:** Se fosse um quadrado era 10m para cada lado, porque dividíamos o 40 pelos 4 lados iguais, mas como é um retângulo temos que pensar que há dois lados mais compridos e dois mais pequenos que têm que ser iguais, por isso podia ser 15, 15, e depois 10, 10, não! é 10 a dividir por 2 por isso é 5 para cada lado.

Dei feedback ao aluno dizendo que tinha explicado muito bem, e reforçando que este era um bom exemplo. Era uma hipótese, mas que poderia haver muitas mais. Foi desta forma que se deu o arranque para todos os alunos começarem a trabalhar.

Um aluno questionou se se poderia usar a representação decimal, ao que respondi para toda a turma que só iríamos trabalhar com números inteiros. Para minorar a complexidade da tarefa. Foram construindo retângulos, colocando as medidas nas dimensões comprimento e largura, para que a soma fosse sempre 40.

Questionei os alunos perguntando: “se houvesse 50 hipóteses desenhavam desenhar 50 retângulos?”. Argumentei que seria boa ideia que organizassem os dados numa tabela de modo a fazer uma melhor leitura da informação que tinham recolhido. Começaram a esboçar a tabela não sabendo muito bem onde colocar as variáveis. Neste sentido, ajudei-os construindo no quadro uma tabela com quatro linhas, onde escrevi com a colaboração dos alunos, em cada linha, respetivamente, perímetro, comprimento, largura e área, e rapidamente os alunos começaram a ditar os dados para completar a tabela. À medida que ditavam os valores, iam verificando com as hipóteses que já tinham encontrado. Ocorreu um diálogo orientado entre a professora e os alunos, ficando desta forma a tabela preenchida (figura 3.6).



P	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
C	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100

Figura 3.6 – Representação tabular utilizada pelos alunos

Posteriormente, sugeri que observassem a tabela e que tentássemos encontrar relações, formular conjeturas, encontrar casos particulares, isto é, percorrer as etapas que estavam descritas na grelha de critérios de avaliação que os pares tinham em cima da mesa.Em grupo turma, os alunos foram formulando relações oralmente e explicando no quadro, à vez; as suas ideias, e os colegas acompanhavam com atenção para contraporem ou concordarem. Tomemos como exemplo a seguinte situação.

> **Luís:** 19+1=20; 18+2=20, 17+3=20 e é sempre assim...
> **Cátia:** Ah! Pois é... boa! É metade do perímetro.
> **Duarte:** Se tivéssemos pensado logo em 20, era só encontrar dois números que a soma fosse 20.
> **Turma:** Pois era.
> **Duarte:** Stora, essa já era de nível 3?
> **Professora:** O que achas? O que está no descritor no nível 3 referente a formular conjeturas? Vamos todos ler.
> **Turma:** Formula uma conjetura geral.
> **Professora:** Vamos pensar se isto acontece com outras medidas de perímetros. Por exemplo, para o caso 36.

Os alunos testaram este caso, uns apoiados nas representações icónicas, outros já na representação tabular. E foram chegando algumas conclusões como a do João: “Professora, com o 36 acontece igual”. Outros alunos foram igualmente confirmando a conclusão do colega. Voltei, ainda a sugerir que testassem para o 48. Da mesma forma, os alunos concluíram que se aplicava a mesma estratégia de resolução que tinham aplicado para os outros casos. Pedi para que observassem os números 36, 40 e 48 e questionei a turma acerca do que têm estes números em comum. "São números pares", disse, baixinho, a Rute.

Depois de terem analisado casos para os números pares, os alunos estavam predispostos para encontrar a generalização de que a soma do comprimento e da largura é metade do perímetro. No sentido de lhes fazer entender que não poderiam formular generalizações a partir de casos particulares, interferi.

Professora: Vamos testar com um ímpar, por exemplo 31.
Duarte: Agora já entram os números decimais.
Professora: Será que podemos generalizar?
Duarte: Só podemos para os números pares. São um caso particular...
Professora: Duarte, repara na grelha e onde colocas este trabalho que estivemos a fazer.
Duarte: Formula conjeturas, nível 2.

Reforcei o diálogo com a turma, com a intenção de perceberem o “salto” de etapa e de verificarem que estávamos perante casos particulares dos números pares. Poderíamos redigir uma conjetura geral, mas realçando que só acontecia no caso dos números pares, porque foi condição estabelecida no início da tarefa que só poderiam trabalhar com números inteiros. Esta extensão da tarefa não estava prevista, contudo tornou-se bastante pertinente e frutífera como exemplos de casos particulares e de discussão em turma. Este diálogo surgiu a partir de uma questão levantada pelo aluno, referente ao nível que atribuía a uma etapa do seu trabalho.

Nesta fase senti que os alunos começavam a apropriar-se da grelha de critérios de avaliação como instrumento de trabalho que os pode ajudar no caminho a percorrer em tarefas desta natureza (diário de bordo 4).Continuamos com a exploração de ideias para encontrar relações surgindo outro exemplo: "Quando o comprimento decresce, a largura cresce.” ao que um colega responde: “Eu pensava que todos tinham a mesma área porque sempre que acrescentava um ao comprimento tirava um à largura e isso dava o mesmo, mas na área não dá.”A aula prosseguiu com o diálogo entre professora e alunos. Porém, o Duarte estava sempre a levantar questões relativamente aos níveis de desempenho, o que se tornou uma mais-valia para a compreensão dos mesmos pelos colegas:

Duarte: Posso dizer uma coisa? Eu acho que é... isto é de nível 2?
Professora: Isto? Isto o quê?
Duarte: Uma relação.
Professora: Sim, vem explicar.

Ao tentar explicar a relação encontrada o aluno deparou-se que a relação não servia para todos os casos e que tinha encontrado um contraexemplo, ao que uma colega retorquiu:

Jéssica: Agora percebi melhor o que é isso!
Professora: Isso… o quê?
Jéssica: Isso que ele disse.
Professora: Sim. Mas repete.

> **Jéssica:** Então quando encontramos uma coisa que não serve … tem esse nome. Estamos a seguir um raciocínio na nossa cabeça e quando vamos experimentar e já não acontece como estávamos a pensar …
> **Professora:** Exato, qual é o nome que se dá a essa situação?
> **Duarte**: Um contraexemplo, e quando encontramos um contraexemplo já é de nível 3.
> **Professora**: Quando mostramos um contraexemplo estamos a justificar a validade da conjetura.

Este pequeno diálogo serviu para chamar a atenção dos alunos que o Duarte ao tentar justificar a sua conjetura, justificou-a através de um contraexemplo e que poderíamos reformulara nossa grelha de critérios de avaliação colocando o contra exemplo dentro da justificação, porque acontece muito que ao justificar uma conjetura deparamo-nos com contraexemplos. Assim, eliminámos a linha do contraexemplos e colocámo-los na das justificações considerando que seria de nível dois porque é a fase intermédia entre a conjetura geral e as conjeturas simples.

Depois das sugestões dos alunos considerei oportuno explicar que poderíamos apagar a linha da "argumentação" porque afinal argumentar em matemática implica utilizar as etapas que estão explícitas na grelha. Os alunos concordaram e o Duarte afirmou: "Concordo, porque não faço a mínima ideia do que deveríamos escrever na argumentação". A discussão realizada foi enriquecedora, quer para o contributo do instrumento de avaliação, quer para consolidar a noção de perímetro e área. Os alunos perceberam que em figuras cujos perímetros são iguais (equiperimétricas) podem encontrar áreas diferentes, sendo que a maior área é a do quadrado, ou seja, quando o comprimento e largura são iguais. Neste contexto aprenderam, ainda que o quadrado também é um retângulo, sendo um caso particular na família dos quadriláteros. Os alunos concordaram que isso fazia sentido e assim deu-se mais um passo para a reformulação da grelha, aceite por todos os alunos, conforme mostra o quadro 3.5.

Quadro 3.5 – Terceira versão da grelha de critérios de avaliação construída na aula

Etapas do processo de raciocínio matemático	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Encontra relações entre os números	Sabe relacionar os números	Conhece conceitos e sabe aplicá-los	Reconhece operações e raciocínios que se podem utilizar com os números
Formula conjeturas	Formula conjetura simples	Formula conjeturas para casos particulares	Formula conjetura geral
~~**Mostra contraexemplos**~~	~~Não testa~~	~~Testa com estratégia adequada~~	~~Testa e prova a validade~~
Justifica a validade das conjeturas	Utiliza com pouco rigor, ou seja, não passa a mensagem de forma adequada	Utiliza a linguagem matemática com algum rigor **Mostra contraexemplos**	Utiliza linguagem matemática adequada na representação natural ou simbólica
~~**Argumentação**~~			

Os objetivos planificados para esta tarefa foram atingidos no tempo estipulado e até de algum modo trabalhados de modo mais rico do que o previsto, pelo contributo que os alunos acrescentaram na discussão. Os alunos neste momento, estavam a pensar simultaneamente na tarefa e na orientação expressa na grelha de critérios de avaliação, visto terem encontrado muitos exemplos que ilustram a linguagem expressa na grelha. Os alunos começam a dar sentido e significado à nova terminologia e a ficarem mais à vontade para expor os seus raciocínios sem o constrangimento de poder estar certo ou errado. Sabem que cada ideia é um passo para uma melhor resolução de cada tarefa.

Voltei a projetar a grelha no quadro e fizemos uma análise das etapas que tínhamos prosseguido. Pedi a alguns alunos para lerem o que tinham escrito e que colocassem a resposta no nível que consideravam corresponder. Esta avaliação foi feita em conjunto turma para uma vez mais procurar que os alunos entendessem o propósito da grelha de critérios de avaliação, ou seja, acompanharem o desempenho da sua atividade.

Tarefa 5 – Investigando cubos

Para iniciar o tópico dos volumes, considerei apresentar à turma a última tarefa de investigação para o estudo.Esta tarefa tinha como objetivo levar os alunos a chegarem à fórmula do volume do cubo, e ainda fazer a conexão entre a álgebra e geometria, particularmente no que se refere a uma sequência numérica. O modo de trabalho dos alunos foi em grupo, tendo como recursos a ficha de trabalho, calculadora e um saquinho com pequenos cubos unitários.

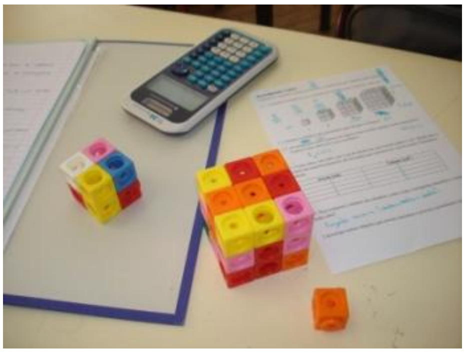


Figura 3.7 – Recursos utilizados pelos alunos

Iniciei a aula informando que iríamos fazer mais uma tarefa de exploração, sendo esta relacionada com o cubo, e que iriam trabalhar em pequenos grupos, sendo os grupos formados como habitualmente. Depois dos alunos se movimentarem para a formação dos grupos, distribuí uma ficha por cada aluno e distribuí um pequeno saco com 50 cubinhos unitários de lego, por grupo, assim como a grelha de critérios de avaliação. De seguida, solicitei que observassem a ficha e que lessem as primeiras questões e, se consideravam que eram capazes de iniciar a tarefa sem que houvesse necessidade de eu fazer qualquer explicação, o fizessem. Disse, ainda que os cubinhos que estavam no saco seriam para usar no caso de sentirem que era útil para o desempenho da atividade. Desta forma, os alunos iniciaram o seu trabalho sem levantar questões. Fui circulando pelos grupos e verifiquei que havia alunos que necessitaram de construir o cubo que estava desenhado na figura 2 para certificarem o número de cubinhos que o constituía.

Figura 3.8 – Manuseamento dos cubos unitários pelos alunos

De igual modo, construíram também o cubo da figura 3, mas não tinham cubos que chegassem para construir o cubo da figura 4, porque assim o entendi, para forçar o desenvolvimento de abstração nos alunos. Porém esta estratégia deixou alguns alunos um pouco embaraçados, pois não conseguiam prever qual o número de cubinhos da quarta figura. Desafiei-os a imaginarem quantos faltavam para completar o cubo grande. Constatei que havia um leque alargado de alunos que mostrava muitas dificuldades na visualização espacial e no poder de abstração. Os alunos foram desenvolvendo a sua atividade e começaram a surgir as respostas à questão 1.1, na sua grande maioria corretamente, tendo todos os grupos montado o cubo grande referente à terceira figura. Para a quarta figura recorreram a diversos tipos de contagem, chegando a dois valores diferentes: 64 e 48. Foi feita a discussão em grande grupo para verificarmos qual dos dois resultados estaria correto. Constituíram-se dois grupos: um que defendia o 48 outro que defendia o 64. Cada um explicou o modo como chegou ao resultado, começando pelo grupo do 48.

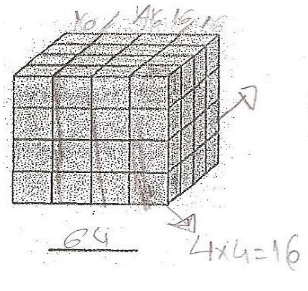


Figura 3.9 – Estratégia dos alunos para a contagem do total de cubos unitários

De seguida apresentou-se outra estratégia defendida pelo grupo do 64, ao que o grupo do 48 compreendeu o seu erro manifestando “esquecemos de contar os cubinhos de dentro”. Os próprios alunos detetaram o seu erro.

Para a questão 1.2 alguns alunos já tinham encontrado uma estratégia com base no número de quadrados que definiam a aresta, e rapidamente começaram a considerar que a figura cinco iria ter 125 cubinhos. Quando questionado como tinha lá chegado, encetou-se um diálogo coletivo na aula em que quase todos os alunos, com o apoio da calculadora, chegaram ao número de cubinhos de qualquer figura. Neste sentido, comecei a orientar os alunos para a generalização da sequência. Sugeri que construíssem uma tabela com duas colunas, sendo uma para o número da figura e a outra para o número de cubinhos. Com este procedimento e com a minha ajuda os alunos chegaram à conjetura geral afirmando o Duarte, entusiasmadíssimo:

> **Duarte:** Não há dúvida que esta conjetura é de nível 3.
> **Professora:** O que é que os colegas acham?
> **João e Rute:** É de certeza, professora.
> **Professora**: Turma! Também consideram que esta conjetura é de nível 3. Porquê?
> **David:** Porque fizemos a generalização.
> **Professora:** E o que é que isso significa?
> **David:** Qualquer número da figura sabemos sempre qual o número de cubinhos que leva.

Com esta intervenção dos alunos, a questão 1.3 ficou resolvida. Passámos de seguida à segunda parte da ficha. Os alunos preencheram a tabela e responderam à questão 2.1 sem dificuldades. Importa referir, que os alunos que estão menos motivados para o trabalho em aula, neste tipo de tarefas têm uma atitude diferente, colaborando e respondendo, até com algum desempenho como foi o caso do David.
A questão 3 ficou reservada para os primeiros trinta minutos de Estudo Acompanhado, que se seguiram após o intervalo.

Depois dos alunos estarem na aula perguntei-lhes se estavam cansados da tarefa ou se poderíamos prosseguir para encontrar algumas relações, ou para passar a limpo algumas questões e organizar ideias. Os alunos disseram que não se importavam de continuar, desde que pudessem continuar em grupo. Foi dada autorização para avançarem. O meu par pedagógico sentou-se num dos grupos e tentou compreender a atividade dos alunos. Constatei que havia membros do grupo a explicar à professora o trabalho que tinha sido realizado, nomeadamente cruzando a informação com a grelha de critérios de avaliação.

Fiquei surpreendida quando passei pelo grupo do Duarte, João e Rute e verifiquei que estavam a trabalhar de forma empenhada para me entregarem uma folha a limpo com o máximo de relações que conseguissem encontrar para que eu ficasse com um bom trabalho. Senti-me emocionada. Enquanto os alunos trabalhavam nos seus grupos projetei mais uma vez a grelha de critérios de avaliação de modo a aperfeiçoarmos os descritores para que qualquer aluno, mesmo de outra turma, conseguisse usá-la. Assim, os alunos consideraram que se deveria explicitar nos descritores aquilo que fizeram nas tarefas. Desta forma, a última versão da grelha reflete as experiências de aprendizagem vivenciadas pelos alunos.

Quadro 3.6 – Última versão da grelha de critérios de avaliação construída na aula

Etapas do processo de raciocínio matemático	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Encontra relações entre números ou entre objetos matemáticos	Cresce/Decresce Pares/Ímpares Dobros/Triplos	Divisores/Múltiplos Primos/Compostos Regularidades ou Padrões Simples	Generaliza uma regularidade
Formula conjeturas (o que acontece se…)	Procura alguns casos particulares	Procura casos particulares com persistência	Formula conjetura geral (generalização)
Justifica a validade das conjeturas	Testa casos e justifica com pouco rigor	Testa casos Mostra contraexemplos	Utiliza linguagem matemática dequada na representação natural ou simbólica

Nesta fase, os alunos comunicavam com alguma fluência quer as etapas do raciocínio matemático quer os seus descritores.Algumas vezes manifestavam dificuldade no entendimento do que deveria ficar nos descritores, sendo necessário gerir consensos e solicitar justificações para a entrada de algumas expressões em detrimento de outras.

4. ANÁLISE E REFLEXÃO

Este capítulo tem como objetivo, mostrar a forma como um grupo de três alunos do 6.º ano de escolaridade chegaram às diferentes etapas do raciocínio matemático, quando trabalham com tarefas de investigação, apoiados pelo uso continuado de critérios de avaliação, onde constam descritores por nível de desempenho, desde o mais elementar ao mais sofisticado. Procura-se compreender como os alunos desenvolvem a competência transversal - raciocínio matemático.

Partindo do significado que os alunos atribuem ao raciocínio matemático, procuro estudar os diferentes processos usados ao longo da realização das tarefas, o uso dos crirérios de avaliação e por fim as dificuldades sentidas pelos alunos,

4.1. O raciocínio matemático e a sua evolução

Significado no início do estudo

No início do estudo, realizei uma entrevista (anexo IV) aos três alunos selecionados, no sentido de compreender o que significava para eles o raciocínio matemático, ao que os alunos responderam:

> **Duarte:** É pensar, ter uma noção das coisas... É raciocinar... é pensar com atenção e concentração...
> **João:** O raciocínio é para se perceber bem matemática é preciso fazer muitos raciocínios, nas outas disciplinas também, mas em menor quantidade.
> **Rute:** Raciocínio, porque não podemos fazer as coisas à balda... Temos que pensar...

Desta entrevista pude inferir que os alunos ligavam a ideia de raciocínio matemático ao ato de pensar. Posteriormente, coloquei também a mesma questão à turma. Foi minha intenção dar oportunidade aos restantes alunos da turma de se pronunciarem acerca do seu entendimento e significado acerca do raciocínio matemático. Deste diálogo percebi que também a maioria dos alunos da turma atribuem ao significado de raciocínio matemático ao ato de pensar. Constatei que nesta fase os alunos não atribuíram qualquer significado às diferentes etapas do raciocínio matemático.

Processos de raciocínio matemático

Seguidamente, passo a apresentar as atividades dos alunos evidenciando o modo como foram evoluindo no processo de desenvolvimento do raciocínio matemático, no que diz respeito à relação entre objetos matemáticos, à formulação de conjeturas e explicação e justificação das conjeturas.

Relações entre objetos

Os alunos nunca tinham realizado uma atividade de investigação na sala de aula, no sentido de procurar "curiosidades". Esta foi a palavra encontrada para o arranque da investigação e assim irmos introduzindo novos vocábulos progressivamente. Gradualmente, os alunos deixaram de usar a palavra "curiosidades" e utilizaram como estratégia seguir a ordem definida nos critérios, iniciando as tarefas pela pesquisa de "relações entre os números". Para concretizar esta etapa, foi negociado que poderíamos encontrar números pares e ímpares, múltiplos e divisores, números primos e compostos, padrões e regularidades.

A tarefa 1 revelou-se muito eficaz e enriquecedora para a negociação de significados e exemplificativa de uma atividade de investigação, uma vez que com exemplos concretos das etapas do raciocínio matemático os alunos conseguiram perceber o significado deste processo. Foi selecionada com esse propósito e logo no enunciado, quando se pede para fazer o prolongamento da tabuada, os alunos sentiram que estavam a trabalhar uma situação nova:

> **Rute:** Nunca tinha feito uma tabuada depois do dez.
> **João:** Eu acho que já fiz, mas nunca procurei curiosidades.
> **Duarte:** Eu gosto de fazer isto.
> **Duarte:** Vamos tentando descobrir conjeturas, fazer pesquisa.

Os alunos iniciaram os seus registos utilizando linguagem simbólica para estruturar a tabuada. Fizeram-no do modo convencional, constituindo novidade o prolongamento da mesma.

Quer para a primeira tarefa, quer para as subsequentes, os alunos apresentaram conclusões das suas investigações no que diz respeito a diversos tópicos.

a) Relações entre as ordens dos números

Depois de realizarem o prolongamento da tabuada, utilizando representação simbólica, os alunos identificaram que o algarismo das unidades do produto é igual ao algarismo das unidades do segundo fator.

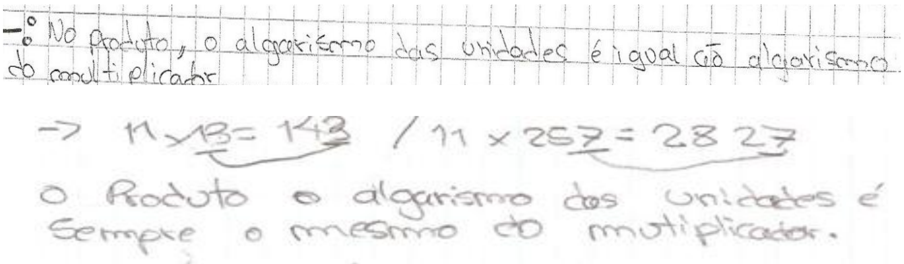

-: No produto, o algarismo das unidades é igual ao algarismo do multiplicador
-> 11 x 13 = 143 / 11 x 257 = 2827
o Produto o algarismo das unidades é sempre o mesmo do multiplicador.

Figura 4.1 – Produções dos alunos relativas à tarefa 1

Verificam para dois casos aleatórios e justificam a veracidade, quer em linguagem simbólica, quer em linguagem natural (figura 4.1).

Na figura 4.2 identificam ainda que adicionando o algarismo das unidades do segundo fator ao algarismo das dezenas do mesmo fator, a soma aparece na ordem das dezenas do produto.


-8 Se adicionar os dois do Multiplicador obtenho o algarismo das dezenas do Produto.

Figura 4.2 – Conclusão elaborada pelos alunos relativa à tarefa 1

Os alunos apresentaram a sua conclusão em linguagem natural dando significado aos termos matemáticos utilizados. Testam a veracidade da sua conclusão para alguns casos e com determinação apresentam-na à turma, recorrendo à representação simbólica (figura 4.3).

$$\boxed{1 + 8}$$

$$1\ 1 \times 1\ 8 = 1\ 9\ 8$$

Figura 4.3 – Estratégia apresentada no quadro pelo Duarte relativa à tarefa 1

Depois desta estratégia exemplificativa, os alunos testam para diferentes produtos e mostraram com confiança e garantia que encontraram uma conjetura geral.

b) Relações entre números pares e ímpares

Tendo sido estabelecido que na relação entre objetos matemáticos poderíamos encontrar relações de par e ímpar, os alunos procedem aos registos:

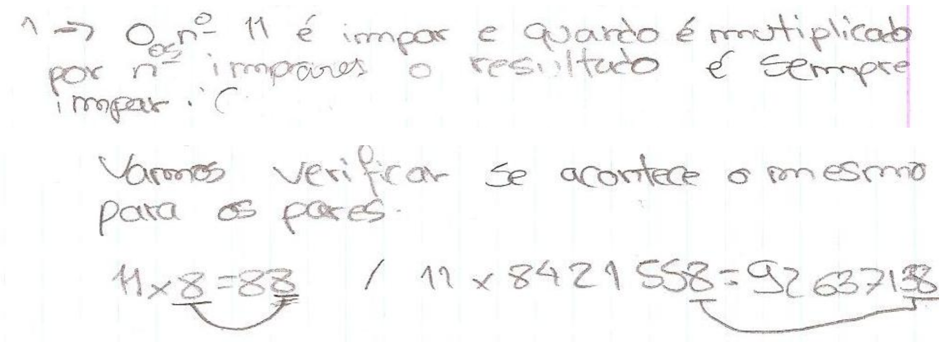


Figura 4.4 – Registos elaborados pelos alunos relativos à tarefa 1

Neste registo, primeiramente os alunos fazem uma constatação importante,em que o produto entre dois números ímpares é impar, todavia não justificam a razão pela qual isso acontece (figura 4.4).

Assim, é possível inferir que os alunos tomam como certas conclusões retiradas apenas a partir da observação, sem as testar convenientemente.Verifica-se que começam a levantar hipóteses entrando já no domínio da formulação de conjeturas. Verificam com um número par menor (8) e com um número par enorme (8421558), porém não escrevem a que conclusão chegaram (figura 4.4). Posso inferir, através das setas, que o número onze, que é ímpar, multiplicado por qualquer número par, o resultado é par. Deste modo, pretendem provar que a conjetura é verdadeira.

Também a tarefa 2 foi profícua no estabelecimento de relações entre pares e ímpares. Nesta tarefa, os alunos trabalham com uma tabela numérica. Procurando continuá-la, identificam regras de formação e fazem registos.

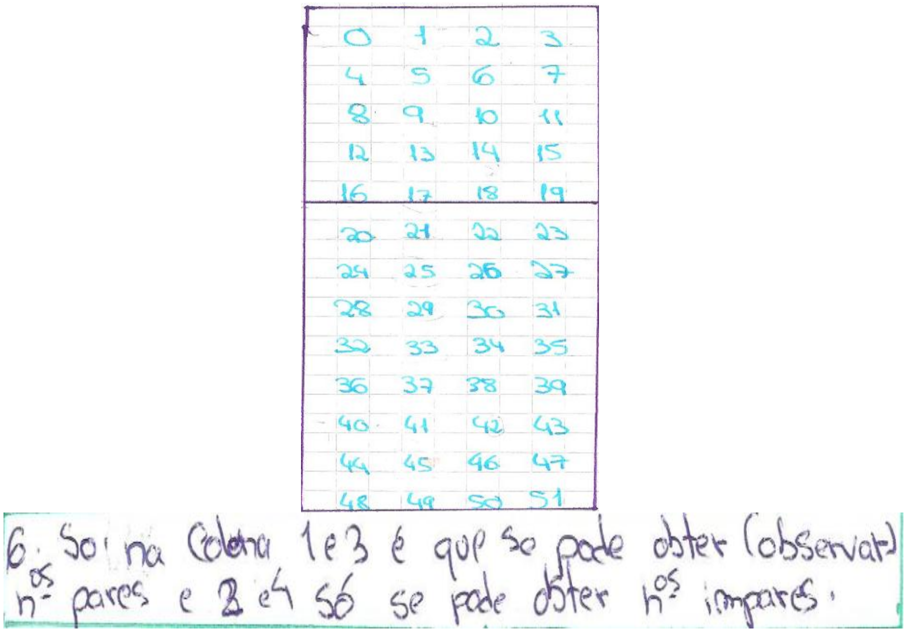


Figura 4.5 – Produções dos alunos relativas à tarefa 2

Apoiados na constatação, fundada na observação de todos os exemplos explicitos na tabela, verificam que na primeira e terceira colunas se encontram os números pares e que na segunda e quarta colunas se encontram os ímpares. Com convicção, apresentam o facto de terem analisado muitos casos e não terem descoberto nenhum que não satisfaça a relação. Os alunos observam também a relação "número da coluna ímpar (1ª e 3ª) que apresentam os números pares” e “número da coluna par (2ª e 4ª) que apresentam os números ímpares” e consideram um caso curioso:

Duarte: Que giro, é muito curioso
João: Porque é que isso acontece?
Professora: Pois é, Porque será?

Os alunos consideraram o acontecimento interessante, mas não transpõem para a representação na tabela os conhecimentos que têm, ou seja, adicionando um número par (1ª coluna) com um número ímpar (2ª coluna) obtém um número par (3ª coluna).

Também o exemplo da figura 4.6 evidencia que os alunos registam factos que observam para todos os casos não tendo ainda a preocupação de justificar o porquê das suas conclusões. Os alunos observam e verificam que a soma dos quatro algarismos é sempre um número par, porém não mostram necessidade de justificar, isto é, de saber porquê.

Figura 4.6 – Conclusão elaborada pelos alunos relativa à tarefa 2

É provável que os alunos, nesta fase, não justifiquem as suas observações porque nos critérios de avaliação ficou negociado que poderíamos avançar por etapas para melhor orientação do trabalho. Como a justificação aparece como última etapa,os alunos não encontraram aqui razão para a justificação.

c) *Múltiplos e divisores*

A tarefa 2 revelou-se frutífera para o estabelecimento de relações entre múltiplos. Os alunos identificam a existência de regularidades, estando estas relacionadas com os múltiplos de números. Identificaram múltiplos de 4 na 1.ª coluna, na direção de cima para baixo (0, 4, 8, 12, 16, 20, …).

Na diagonal, identificaram os múltiplos de 3, da direita para a esquerda, e múltiplos de 5 da esquerda para a direita na tabela. Constata-se no registo que os alunos têm conhecimento de múltiplos e reconhecem-nos na representação tabular.

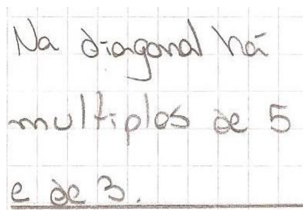


Figura 4.7 – Registo dos alunos relativo à tarefa 2

Na tentativa de chegarem ao nível superior tentam encontrar exemplos de relações entre múltiplos e divisores. Assim, utilizam os primeiros algarismos pares para demonstrar que estes são divisores dos seus múltiplos (figura 4.8).

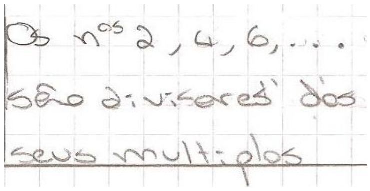


Figura 4.8 – Registo dos alunos relativo à tarefa 2

d) Identificação de regularidades

Os alunos pretendem afirmar que o algarismo das unidades, no produto, repete-se de 0 até 9 consecutivamente (figura 4.9).

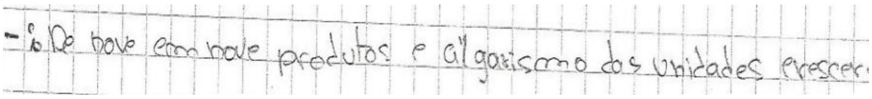


Figura 4.9 – Conclusão dos alunos relativa à tarefa 1

Inicialmente, os alunos observam regularidades simples e progressivamente vão identificando outras mais sofisticadas como a da figura 4.10.

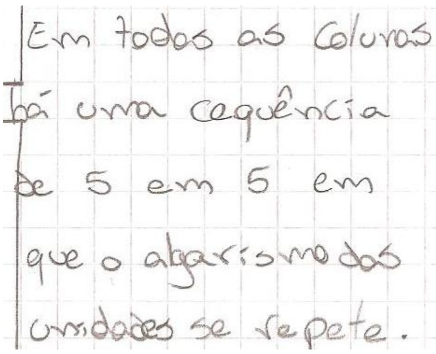


Figura 4.10 – Regularidade elaborada pelos alunos relativa à tarefa 2

Por observação, os alunos identificam que em todas as colunas o algarismo das unidades se repete de 5 em 5. Para compreender a regularidade da figura 4.10 foi necessário fazer um esquema no quadro para que os colegas a entendessem.

Os alunos querem afirmar que nas quatro colunas de cima para baixo num intervalo de 5 números reaparece o algarismo referente às unidades relativo ao antecessor.

Na discussão em aula foi necessário proceder à elaboração deste registo com linguagem simbólica para que os colegas pudessem compreender o que estava registado em linguagem natural.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27

Figura 4.11 – Estratégia apresentada no quadro pelo Duarte relativa à tarefa 2

Nem sempre os alunos registam nas conclusões o seu processo de pensamento sendo de grande utilidade a representação tabular ou esquema para melhorar a comunicação entre o emissor e os receptores.

Na tarefa 5, os alunos apresentaram como exemplo de uma regularidade o número de quadrados da face frontal do cubo que se acrescenta em cada figura (figura 4.12).

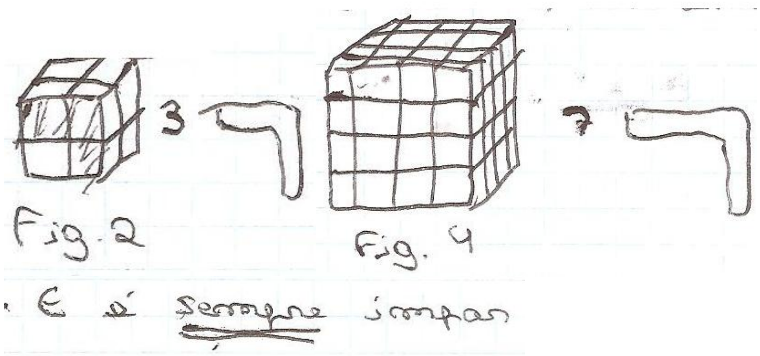


Figura 4.12 – Produção dos alunos relativa à tarefa 5

Para explicar à turma a regularidade encontrada pelo seu grupo, o Duarte explica:

> **Duarte:** Na figura 1 há um quadrado. Na figura 2 mantem-se o que já lá está e acrescentam-se 3. Na figura 3, mantem-se os que já lá estávam e acrescentam-se 5. Na figura 4 mantêem-se os que lá estão e acrescentam-se 7 e assim sucessivamente.
> **Professora:** O que significa “é sempre ímpar”?
> **Duarte:** É que o número de quadrados que se acrescenta é sempre ímpar.
> **Professora:** Muito bem. Como avalias este trabalho?

Duarte: Professora eu acho que é o máximo, nível 3. É muito boa.
João: Eu também concordo. De todas as regularidades, esta foi a mais interessante de encontrar, porque não estávamos à espera.
Rute: Não pode ser de nível 2 porque não é uma regularidade simples.Nesta conseguimos generalizar uma regularidade, que é o que está no descritor de nível 3.

De facto quando os alunos sublinham a palavra "sempre" mostram que identificaram a sequência numérica dos números ímpares consecutivos.

e) *Relações entre dimensões*

Na discussão realizada em aula, os alunos reconhecem que a representação em tabela facilita muito a leitura dos dados e contribui para que haja melhor compreensão das três variáveis. Inicialmente estavam perdidos no trabalho por terem desenhado tantos retângulos,utilizando a representação pictórica, ao que a aluna afirma:

Rute: Já estou perdida com tantos retângulos.
Professora: Tentem organizar os vossos dados numa tabela, facilita bastante.
João: Estamos a fazer bem. Não estamos?
Professora: Sim, mas depois organizem os dados numa tabela. Vai facilitar muito as conclusões que podemos retirar.

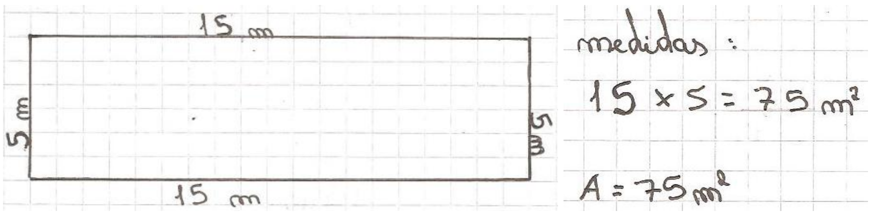
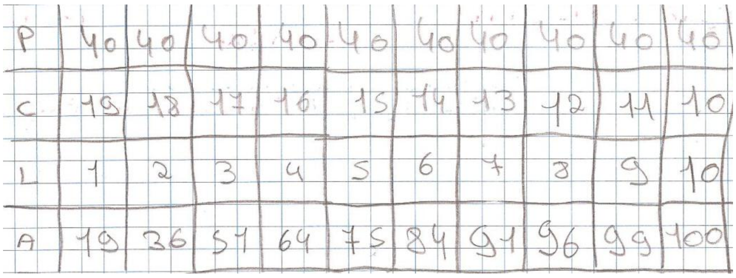


Figura 4.13 – Estratégia utilizada pelos alunos na tarefa 4

O João empenhou-se quer na representação geométrica quer na representação símbólica, contudo os alunos tiveram dificuldade em encontrar uma representação tabular que desse significado aos dados obtidos.

Nesta fase, os alunos associam a ideia de tabela a uma representação com duas colunas na vertical, por isso, foi necessária a minha ajuda para encontrármos uma representação tabular que satisfizesse todas as variáveis da tarefa (figura 4.14).



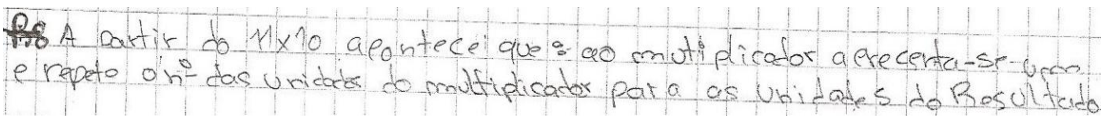
P	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
C	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100

Figura 4.14 – Registo dos alunos na organização dos dados na tarefa 4

Foi significativo o uso da representação tabular como veículo para a compreensão da relação entre comprimento e largura em figuras equiperimétricas. Desta forma, os alunos constataram que quando a medida do comprimento e a medida da largura são iguais obtém-se a maior área.

Formulação de conjeturas

Uma conjetura matemática é uma afirmação que se suspeita ser verdadeira, podendo-se referir a um único objecto ou a uma classe de objectos, mas que necessita de validação. Nem todas as conjeturas têm o mesmo alcance matemático. Algumas referem-se a factos relativamente simples ou evidentes, outras envolvem um forte elemento inesperado e outras ainda são particularmente importantes porque delas é possível derivar muitas conclusões.



A partir do 11x10 acontece que ao multiplicador acrecenta-se um e repete o nº das unidades do multiplicador para as unidades do Resultado

Figura 4.15 – Conclusão elaborada pelos alunos relativa à tarefa 1

É o caso do episódio da figura 4.15 que evidencia como o grupo elabora a conjetura informalmente. A partir da observação, os alunos constatam factos e fazem registos que traduzem as suas ideias iniciais sem a preocupação de formular as conjeturas necessárias para as fundamentar, indo a posterior testar a sua validade.

Neste episódio os alunos ao tentarem explicar aos colegas o significado da frase deparam-se que não tinham testado para casos suficientes, pois percebem que a conjetura não é válida.

+ 1

$11\text{x}1\underline{3} = 14\underline{3}$

Figura 4.16 – Estratégia apresentada no quadro pelo João relativa à tarefa 1

> **Professora:** Todos perceberam o que o João explicou?
> **David:** Posso dar um exemplo, 11x17 vai dar 187, já fiz mais e é sempre verdade.
> **Professora:** Vamos ver o que acontece para o 11x23. (O aluno utiliza a calculadora)
> **David**: Já não dá.
> **Professora:** Verificaram que a vossa conjetura não é válida e provámos isso através de um contraexemplo. Percebem esta linguagem?

Aproveitando a discussão da conclusão da figura 4.15 questionei os alunos pedindo aleatoriamente alguns produtos, para lhes mostrar que quando procuramos algo que não é conhecido estamos a formular conjeturas e que, posteriormente, é necessário testá-las, verificando-as para alguns casos.

O João voltou ao quadro para motrar que não seria “mais um” mas que neste exemplo seria "mais dois” e justificou oralmente que seria mais dois porque agora tinhamos duas dezenas: “Temos que somar ao segundo fator o número das dezenas desse fator.”

+ 2

$11\text{x}2\underline{3} = 25\underline{3}$

Figura 4.17 – Estratégia apresentada no quadro pelo João relativa à tarefa 1

Lancei uma questão à turma no sentido do que aconteceria se trabalhássemos com o algarismo referente às centenas, por exemplo, para 11 x 146 e para 11 x 246. Os alunos fizeram os cálculos e observavam os números na tentativa de encontrar uma explicação para aqueles casos, tendo por base a estratégia utilizada para os casos anteriores.

> **Duarte:** Professora, fizemos uma exploração, aqui no grupo, e já sabemos explicar o que acontece.

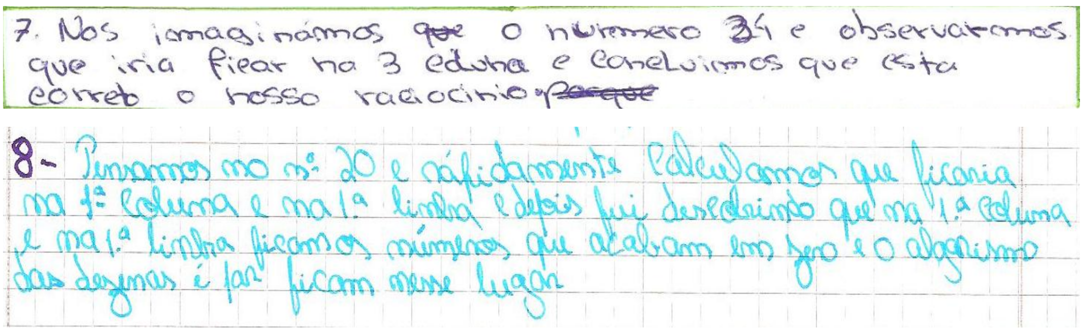
+ 14 + 24

$11\text{x}14\underline{6} = 160\underline{6}$ $11\text{x}24\underline{6} = 270\underline{6}$

Figura 4.18 – Estratégia apresentada no quadro pelo Duarte relativa à tarefa 1

Com estes exemplos, elaborados no quadro, o Duarte explicou que o número das unidades do produto é sempre igual ao número das unidades do segundo fator, e que se soma ao número completo do segundo fator o algarismo correspondente à ordem das dezenas e à ordem das centenas**:** "Professora, parece que assim conseguimos saber sempre o resultado sem fazer os cálculos".

Toda esta discussão em turma surgiu a partir da frase da figura 4.15 apresentada pelos alunos. Neste episódio os alunos chegaram à formulação de conjeturas, exploraram situações que não esperavam e já esboçaram uma generalização de forma informal. Quando os alunos utilizam em linguagem natural a expressão “pensámos no número” e “nós imaginámos o número” (figura 4.19) estão a formular conjeturas e a fazer previsões, que rapidamente tentam justificar através da observação.


7. Nos imaginámos ~~que~~ o número 34 e observarmos que iria ficar na 3 coluna e concluimos que esta correto o nosso raciocinio ~~porque~~

8- Pensamos no nº 20 e rápidamente calculamos que ficaria na 1ª coluna e na 1ª linha e depois fui descobrindo que na 1ª coluna e na 1ª linha ficam os números que acabam em zero e o algarismo das dezenas é par ficam nesse lugar

Figura 4.19 – Registos dos alunos relativos à tarefa 2

Neste registo, os alunos pretendem afirmar que na primeira coluna da tabela numérica encontram-se todos os números que acabam em zero e cujo algarismo das dezenas é par (0, 20, 40, 60, ...).

Por analogia, poder-se-ia dizer que na terceira coluna se encontram todos os números que acabam em zero e cujo algarismo das dezenas é ímpar (10, 30, 50, 70, ...). Desta forma, poderia afirmar que, por previsão, os alunos saberiam em que coluna ficariam os números terminados em zero.

Numa primeira abordagem, a generalização pode assumir um carácter infomal e ser expressa em linguagem natural como se observa nas produções da figura 4.20.

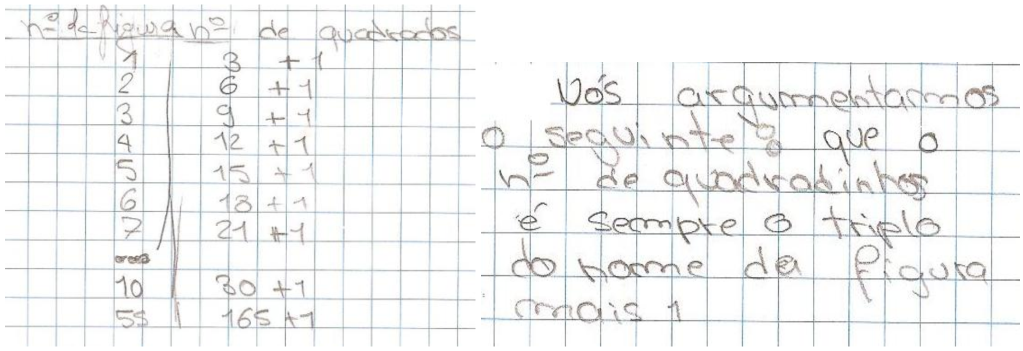


Figura 4.20 – Produções dos alunos relativas à tarefa 3

Os alunos testam através da tabela para os primeiros sete termos, colocam o símbolo de reticências para informar que há continuidade dos termos e, por fim, testam para dois casos aleatórios o 10 e o 55. Os alunos multiplicam o número da figura por 3 e adicionam 1 que representa o quadrado não pintado. A partir destes dados, formulam a conjetura geral em linguagem natural. A organização do número de ordem (termo) e do número total de quadrados na representação tabular revela-se uma mais-valia para os alunos compreenderem a generalização.

Igualmente na tarefa 5, os alunos encontram a conjetura geral apresentando a seguinte estratégia.

Figura 4.21 – Produção dos alunos relativa à tarefa 5

O Duarte fez a representação pitórica no quadro e explicou aos colegas que ao contar o número de quadrados da face frontal do cubo se o multiplicar pelo número da figura consegue sempre saber o número total de cubos unitários que compõem o cubo grande. Alguns colegas foram testar para outros casos.

> **David:** Espera aí, que eu vou ver se resulta sempre.
> **Luís:** David! Faz para a figura 4 que eu faço para a 6.

Ao verificar que a justificação estava correta, afirmam: “O rapaz é esperto”.

A colega do grupo do David e do Luís comenta ainda.

> **Ana:** Assim é muito mais fácil, porque não nos perdemos na contagem dos cubos. E para mim é muito confuso contar os cubinhos. Perco-me sempre.

A aluna verbaliza a dificuldade de alguns alunos na visualização espacial. De facto, esta é uma boa estratégia para a contagem do número de cubos.

Ao escreverem a palavra “formula” esboçam a ideia de que encontraram uma lei que serve para todos os casos.

Explicação e justificação

Na elaboração dos descritores dos critérios de avaliação, foi negociado com os alunos, que na rúbrica “justifica a validade das conjeturas” poderiam utilizar linguagem natural, isto é, poderiam começar por retirar conclusões ou escrever aquilo em que estavam a pensar. Poderiam também utilizar linguagem simbólica e mostrar contraexemplos. Desta forma, iniciaram a tarefa 1 prolongando a tabuada de modo convencional, aplicando uma estratégia recursiva, ou seja, aplicando a representação simbólica adquirida no 1.º ciclo. Por observação, os alunos retiraram conclusões que estabeleceram como definitivas e quando tentam explicar aos colegas o seu pensamento, verificam que as mesmas não são válidas, deparando-se com um contraexemplo.

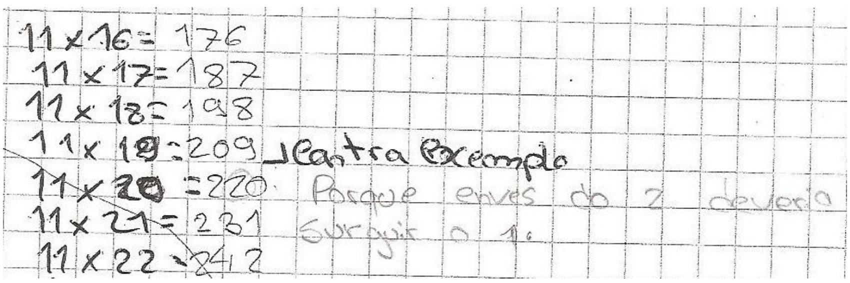


Figura 4.22 – Justificação apresentada pelos alunos na tarefa 1

Esta explicação foi o primeiro contacto que os alunos tiveram com um contraexemplo. Foi a partir daqui que perceberam que poderiam justificar uma conjetura através de uma situação contrária ao que estavam a pensar que iria acontecer. Este passou a constituir um novo vocábulo na linguagem matemática dos alunos.

Nesta produção, os alunos escrevem “porque em vez do 2 deveria surgir o 1”, isto é, na previsão que tinham feito o algarismo das centenas continuaria a ser 1 como nos produtos anteriores, pois estavam centrados na sequência crescente do algarismo das dezenas e das unidades. No entanto, quando se deparam com o 2 no algarismo das centenas em vez do 1 ficam surpresos e um dos elementos do grupo exclama “Ah! Não dá como eu estava a pensar.”

Tomando ainda o contraexemplo como uma estratégia utilizada para a justificação das observações e conjeturas, há evidências de uma progressão da compreensão do significado do novo vocábulo, como mostra a figura 4.12.

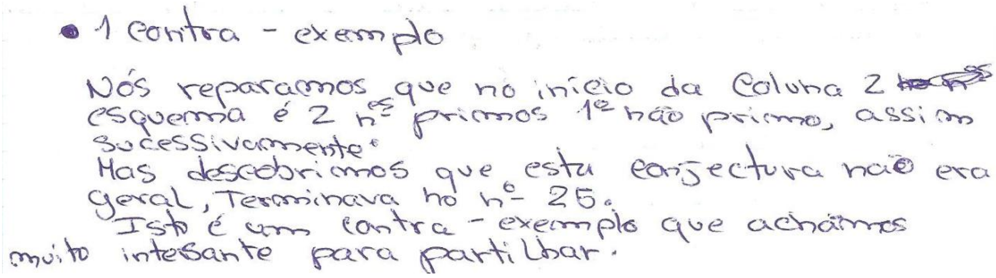

• 1 contra - exemplo
Nós reparamos que no inicio da coluna 2 esquema é 2 nºs primos 1º não primo, assim sucessivamente.
Mas descobrimos que esta conjectura não era geral, Terminava no nº 25.
Isto é um contra - exemplo que achámos muito intesante para partilhar.

Figura 4.23 – Justificação apresentada pelos alunos na tarefa 2

Apresentam como conjetura que na segunda coluna da tabela numérica há uma sequência na qual entre dois números primos há um número composto. Ao testarem a conjetura, encontram um contraexemplo: “descobrimos que esta conjetura não era geral, terminava no número 25”. Com esta exploração, os alunos procuram encontrar uma conjetura geral e ao tentar justificá-la são surpreendidos, mais uma vez, com um contraexemplo.

Na figura 4.13 os alunos explicam o que acontece em casos particulares, sendo estes escolhidos aleatoriamente, mas já com a intenção de provar a formulação de uma conjetura.

Ao redigir esta explicação, os alunos recorrem à linguagem simbólica para exemplificar o que tinham expresso em linguagem natural. Utilizam o número constituído pelo algarismo das centenas e das dezenas do produto e subtraiem a quantidade do algarismo das centenas

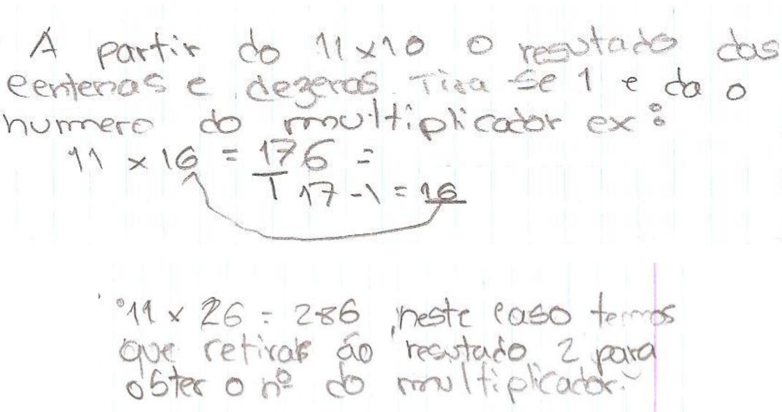


Figura 4.24 – Explicações dos alunos relativa à tarefa 1

Assim, pretendem mostrar que conhecendo o produto conseguem saber qual o segundo fator.

Neste episódio da figura 4.25, os alunos conciliam a linguagem pictórica com a linguagem natural para justificar a sua conjetura. Deste modo, os alunos explicam que o número de quadrados que se acrescentam em cada figura da sequência em relação à anterior são dois.

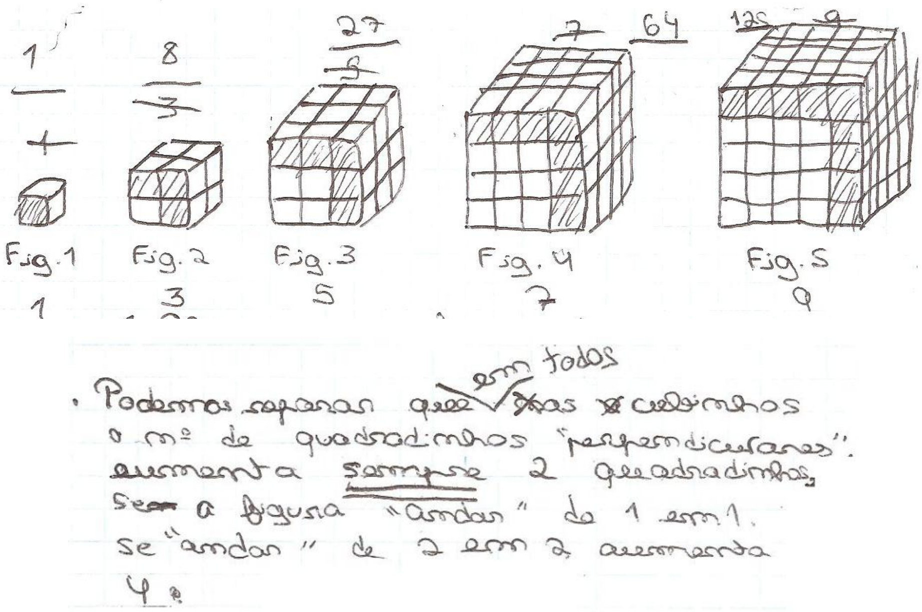


Figura 4.25 – Produção dos alunos relativa à tarefa 5

Mais uma vez se verifica que as justificações aparecem a jeito de explicações a partir de observações realizadas e não a refletir no porquê. Porém, nesta situação os alunos explicam e evidenciam justificações adequadas ao seu nível de escolaridade.

4.1.1. Uso dos critérios de avaliação

Para uma melhor compreensão do processo de raciocínio matemático, fragmentei o processo em etapas. Estas etapas foram explícitas nos critérios de avaliação e, conjuntamente com os alunos da turma, procurámos encontrar descritores adequados a cada nível de desempenho, desde o mais simples ao mais elaborado, com o propósito dos alunos se apropriarem das diferentes etapas do processo do raciocínio matemático e simultaneamente autoavaliarem as suas atividades desenvolvidas nas tarefas propostas.
Para que os alunos pudessem dar uso aos critérios de avaliação de que dispunham foi necessário atribuir-lhes significado, compreenderem o novo léxico, isso foi feito através da experiência de trabalho da tarefa 1, a partir da qual a grelha de critérios de avaliação (suporte físico) foi elaborada.

O Duarte afirmou que "No início foi confuso compreendermos a utilidade da grelha, mas à medida que fomos trabalhando situações concretas percebemos que as etapas definidas nos critérios de avaliação conduzia o trabalho que deveríamos realizar". Os restantes elementos da turma concordaram com a afirmação do Duarte e alguns acrescentaram:

> **Catarina:** A grelha funciona como se fosse um guião.
> **David:** Assim, já temos uma orientação por onde começar.
> **Rute:** Podemos começar do mais simples, como ver os pares/ímpares, sequências crescentes ou decrescentes até chegarmos a situações mais complexas.

No final da discussão/reflexão relativa à tarefa 3, revisitando a figura 4.20, questionei a turma acerca da utilização dos critérios de avaliação nessa atividade. Tive como intenção verificar se nas tarefas onde existem questões formuladas, ainda assim os alunos utilizavam os critérios de avaliação:

> **João:** No início não usámos porque havia perguntas para respondermos.
> **Carolina:** Nós também não, porque as perguntas já diziam o que tinhamos de fazer.
> **Professora:** Certo. Mas, agora no final do trabalho, podem ver a que nível corresponde vosso desempenho.
> **Duarte:** Nós achámos que é de nível 3. Fomos ver a grelha e aqui diz "formula a conjetura geral" e conseguimos fazer isso.

> **Professora:** Ok. Mas gostava de perceber uma coisa.Vocês querem dizer que nas fichas em que as questões estão formuladas não recorrem tanto à grelha e que nas fichas em que não há perguntas precisam de a utilizar mais? Foi isto que todos sentiram?
> **Catarina:** É isso mesmo professora.

Por um lado, nas tarefas 3 e 5, onde havia questões formuladas, os alunos não recorreram tanto aos critérios de avaliação, porque, como afirmam, "as perguntas já diziam o que tinham de fazer". Por outro, nas tarefas abertas, ou seja, onde não havia questões explícitas, a grelha com os seus descritores serviu de auxílio para monitorizar o trabalho.

Em relação à autoavaliação do grupo, é notória a análise que fazem do seu desempenho, evidenciando alguma apropriação dos critérios de avaliação.Como fizeram parte da elaboração dos descritores da grelha, a certa altura os alunos desenvolviam as tarefas sem recorrer constantemente ao suporte físico, o que dava a entender que já a tinham interiorizado.

O ponto 3 da tarefa 5 menciona " Faz uma extensão da tarefa e procura relações". Na figura 4.26 os alunos produzem o seu próprio enunciado, mostrando que conhecem os passos a percorrer para explorar essa questão aberta.

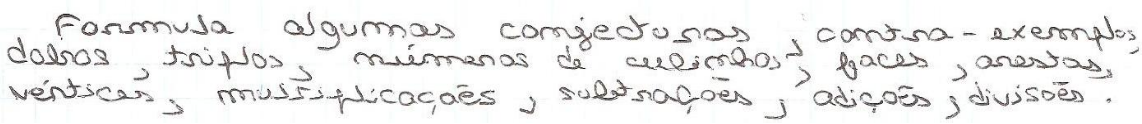

Formula algumas conjecturas, contra-exemplos dobros, triplos, números de cubinhos, faces, arestas, vértices, multiplicações, subtrações, adições, divisões.

Figura 4.26 – Enunciado produzido pelos alunos relativo ao ponto 3 da tarefa 5

Os alunos dão a entender que no critério "relação entre objetos" pensaram em palavras associadas à Geometria, transpondo o que tinham aprendido nas tarefas de Álgebra.
Ao escreverem "formula algumas conjeturas e contraexemplos" mostram também que se apropriaram da linguagem associada ao processo de raciocínio matemático.

Atendendo ao vocabulário utilizado pelos alunos nas suas respostas e conclusões, ao longo das tarefas desenvolvidas, constata-se que utilizam a terminologia expressa na grelha de critérios de avaliação.

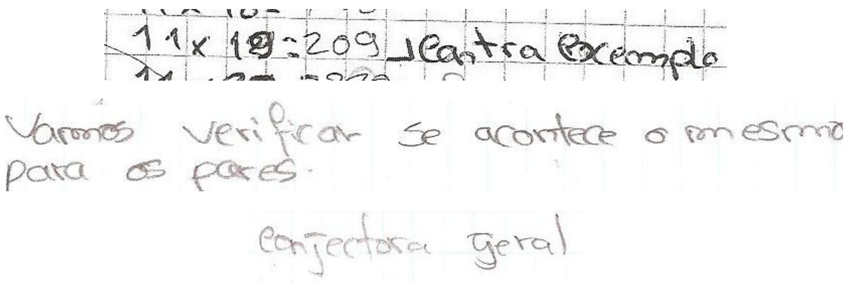


Figura 4.27 – Vocabulário utilizado pelos alunos

A figura 4.27 evidencia o modo como os alunos utilizaram os critérios de avaliação em diversas fases do processo de raciocínio matemático: justificar com contraexemplos, testar conjeturas (“vamos verificar se...”), formulação da conjetura geral.

Desta forma, a utilização da grelha, para além de permitir a autoavaliação dos alunos, revelou-se ainda uma mais-valia para a interiorização do léxico inerente ao que é protagonizado no PMEB (DGIDC, 2007).

No sentido de perceber em que fase do trabalho os alunos recorrem mais à grelha, inquiri os alunos objeto de caso.

> **Duarte:** Primeiro fazemos tudo o que nos lembramos e só depois vamos ao que nos falta.
> **Professora:** Mas do que é que se lembram?
> **Rute:** Lembro-me de encontrar relações e penso logo em ver se há múltiplos, números primos, potências,regularidades, etc.
> **José:** Eu penso no encontrar relações e vou procurar múltiplos divisores, sequências, etc.
> **Duarte:** Penso nas conjeturas. É o que gosto mais. Acho desafiante.
> **Professora:** Então, consultam a grelha no início, no meio ou no final da atividade?
> **Duarte:** É mais ou menos no meio para sabermos onde estávamos.

Os alunos recorrem à consulta da grelha na fase intermédia do trabalho para verificarem em que nível estão e o que lhes falta fazer para chegar ao último nível, verificando-se também que não necessitam do suporte físico para recordar algumas das etapas definidas.

No excerto da figura 4.28 é possível verificar o reconhecimento da utilidade dos critérios de avaliação por parte dos alunos que ocorreu à medida que iam desenvolvendo as suas atividades.

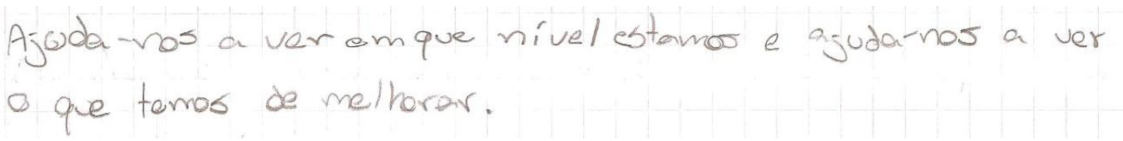

Ajuda-nos a ver em que nível estamos e ajuda-nos a ver o que temos de melhorar.

Figura 4.28 – Produção dos alunos relativa à utilidade dos critérios de avaliação

Os alunos tomam consciência da utilidade da grelha de critérios de avaliação manifestando que podem melhorar as suas atividades. Os alunos deparam-se com constrangimentos na sua resolução de tarefas de cunho investigativo. Por isso, o uso de critérios de avaliação revelou-se um instrumento de trabalho preponderante, uma vez que seguindo as etapas estabelecidas, desde o encontrar relações entre os números, ao formular e testar conjeturas e por fim justificcar com linguagem adequada, os alunos encontraram uma forma de ultrapassar esse constrangimento. Os alunos procuravam na grelha uma orientação para o desenvolvimento do seu trabalho.

4.1.2. Dificuldades sentidas

Nesta secção, faço referência às dificuldades demonstradas pelos alunos inerentes à realização das tarefas e à utilização dos critérios de avaliação.

Interpretação das tarefas

Tratando-se de uma novidade, inicialmente os alunos não conseguiam interpretar o trabalho que lhes era solicitado porque nunca tinham experienciado uma situação análoga.

> **Marco:** Professora é para fazer o quê?
> **Rute:** Isto não tem perguntas. Como é que fazemos?
> **Professora:** Tentem procurar relações de múltiplos/divisores, pares/ímpares, …

As maiores dificuldades centraram-se na fase em que os alunos precisavam de interpretar a situação para elaborarem uma estratégia de trabalho. Assim, foi necessário explorar exemplos concretos para que eles os tomassem como referência.

O facto de as tarefas terem sido realizadas em grupo ajudou a ultrapassar essas dificuldades, porque os alunos ao interagirem com os elementos do seu grupo e com a turma tinham liberdade para lançar ideias, levantar questões e ao mesmo tempo esclarecer as dos colegas, o que ajudava à concretização de uma estratégia.

O questionamento e feedback oral da professora foram essenciais para apontar estratégias de modo a chegarmos a algumas conclusões. Por exemplo, quando os alunos mostravam alguns casos particulares, convencidos de tererm encontrado uma conjetura geral, tentava levá-los a encontrar contraexemplos possibilitando o retomar da exploração, outras vezes tento fazer, a seguir às respostas dos alunos, a pergunta "porquê?". Encorajava a discussão entre os alunos e eliminava as respostas ao acaso.

A partir das conclusões dos alunos foi necessário trabalhar o que era aceitável para uma justificação adequada, quer em linguagem natural, quer simbólica. Através das construções de frases imcompletas ou com pouco sentido matemático fomos corrigindo-as com os termos adequados.

Comunicação das ideias

Em alguns dos registos, como o da figura 4.29, elaborados pelos alunos, há evidências de que nem sempre escrevem aquilo que pretendem transmitir, pois ao transportar para o papel as conclusões que retiram a partir das observações descuram o rigor da linguagem matemática.

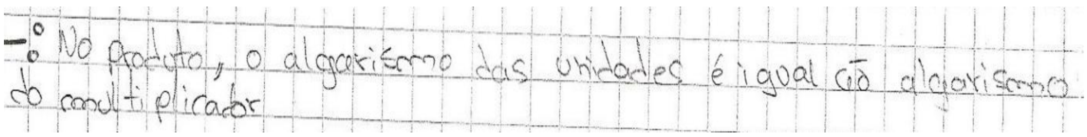


Figura 4.29 – Observação registada pelos alunos relativa à tarefa 1

Em vez da frase "no produto, o algarismo das unidades é igual ao algarismo do multiplicador", os alunos pretendiam afirmar que "no produto, o algarismo das unidades é igual ao algarismo das unidades do multiplicador".

Na figura 4.30 os alunos ao escreverem "o resultado das somas está na tabela" não têm a percepção de que esta produção não tem conteúdo.

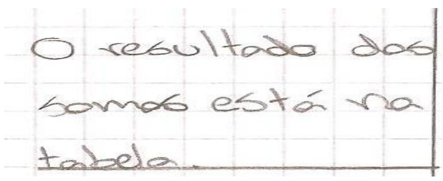


Figura 4.30 – Observação registada pelos alunos relativa à tarefa 2

Quando questionados pelos colegas ("Somas das colunas ou das linhas? E onde estão os resultados?") reconhecem que a frase não é um indicador daquilo que eles queriam expressar.

Na afirmação relativa à figura 4.31 os alunos omitem que o número de quadrados pintados é o triplo do número da figura e não o mesmo, como dizem.

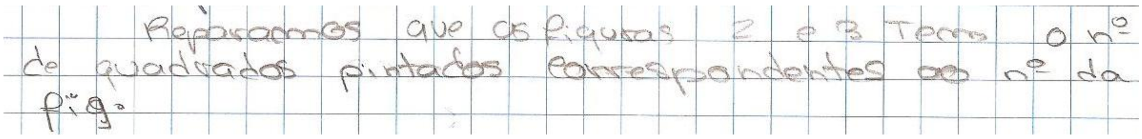


Figura 4.31 – Observação registada pelos alunos relativa à tarefa 3

Com estes exemplos, é evidente que nem sempre o que os alunos registam reflete com clareza as suas ideias, mas quando questionados oralmente para a explicação das suas produções conseguem mostrar o seu raciocínio. Assim, posso inferir que é necessário trabalhar a comunicação matemática para que os alunos ultrapassem estas dificuldades, como omitindo vocábulos que embora pareçam indispensáveis não o são para uma interpretação adequada.

Representação tabular, pictórica e simbólica

A representação tabular permite a organização dos dados, facilita a leitura da sequência algébrica e contribui para a exploração das regularidades, possibilitando definir uma generalização.

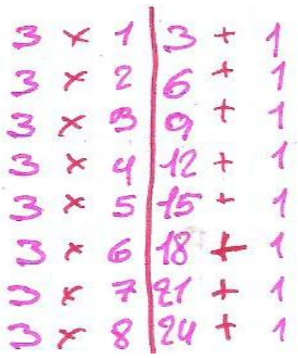


Figura 4.32 – Representação tabular elaborada pelos alunos na tarefa 3

Na produção da figura 4.32, os alunos constroem a tabela sem se preocuparem com o rigor necessário. Embora atribuam significado às colunas da tabela, não a completam, nem retiram qualquer conclusão, apresentando assim o seu trabalho por terminado.

Identificam, respetivamente o triplo, o número da figura, o número total de quadrados pintados e o quadrado branco que se mantém constante. Contudo, a representação não está organizada de modo a que seja percetível a compreensão dos dados. Não escrevem, no topo da tabela, o número da figura e o número de quadrados necessários para a construir, o que ajudaria o entendimento da mesma.

Na tarefa 4, a representação pictórica foi a forma encontrada pelos alunos para visualizarem a relação entre figuras equiperimétricas com diferentes áreas. Embora seja um bom recurso para a exploração dos enunciados, nem sempre os alunos têm o cuidado necessário para não serem induzidos em erro.

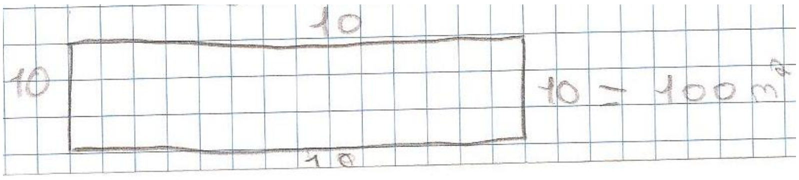


Figura 4.33 – Representação pictórica elaborada pelos alunos na tarefa 4

Importa referir a falta de rigor na escala, pois os alunos atribuem o valor 10 ao comprimento com 14 quadrículas e o mesmo valor para a largura com 3 quadrículas, em vez de contarem o mesmo número de quadrículas para o comprimento e largura, representando assim o quadrado de lado 10 que desejavam. Por um lado,verifica-se que mesmo nas representações pictóricas os alunos não expressam com clareza o que pretendem. Por outro, quando os alunos escrevem “10 = 100 m^2” expressam também a falta de acuidade na utilização do símbolo de igualdade. Deveriam escrever “A = 100 m^2” ou “10mx10m = 100 m^2”.

Também a produção da figura 4.34 reflete a falta de rigor dada pelos alunos à simbologia matemática.

Figura 4.34 – Representação simbólica elaborada pelos alunos na tarefa 5

Os alunos pretendiam escrever 6x6=36 e 36x6=216, o que dá a entender que utilizam os símbolos matemáticos sem ter consciência do seu pleno significado, neste caso o sinal de igualdade.

Uso dos critérios de avaliação

Uma das primeiras dificuldades está relacionada com a comunicação interpessoal. Para aferir e negociar os critérios de avaliação, foi necessário explicar com exemplos práticos e simples o significado dos novos vocábulos matemáticos. Dentro dos grupos, houve dificuldades no entendimento quer das etapas quer dos descritores da grelha. Foi também necessário gerir consensos e tranquilizar os alunos, dizendo-lhes que, gradualmente, iriam conseguir compreender a semântica das palavras.

Destaca-se, também, a tensão entre os elementos do grupo na apreciação do nível de desempenho correspondente às atividades realizadas. Uns elementos justificavam a atribuição de um determinado nível e outros reconheciam que ainda lhes faltava alguns passos que justificassem esse mesmo nível.

> **Professora:** O que é que se passa? Porque estão aborrecidos?
> **João:** Eu acho que é de nível 3.
> **Duarte:** Não, eu acho que é de nível 2, porque ainda não mostrámos para todos os casos.
> **Rute:** Professora, eu também acho que é de nível 2, o Duarte tem razão.

Este episódio reflete que o João parecia ainda não ter entendido o significado de “conjetura geral”, pois, como o grupo tinha testado muitos casos particulares, não encontrando nenhum contraexemplo, este aluno fez, antecipadamente, uma apreciação do trabalho de nível 3. Todavia, o Duarte e a Rute pareceram ter compreendido que depois de testar para vários casos, deviam também estabelecer uma validação para todos os casos possíveis. É neste sentido que surgem alguns conflitos entre os elementos do grupo relativos ao entendimento dos descritores de desempenho.

Também o descritor “utiliza linguagem matemática adequada” gerou alguns atritos. Numa primeira fase, os alunos consideravam que para obter nível 3 bastava que nas conclusões escritas os termos matemáticos estivessem corretos. Quando surgiam as apresentações em esquemas ou tabelas, em que as justificações estavam corretas e adequadas, alguns alunos não as aceitavam como de nível 3, afirmando que “a justificação tem que ser escrita”, ou seja, em linguagem natural. Outros reforçam ainda que “os desenhos e as tabelas são bons para perceber, mas a justificação tem que ser escrita”. Esta discussão deu azo a que este descritor fosse reformulado para “utiliza linguagem matemática adequada na representação natural ou simbólica”, sendo necessário que os alunos visualizassem, com exemplos concretos, a diferença entre um esquema como suporte de justificação e um esquema que por si só já justifica a conjetura.

4.1.3. A concluir

No início do estudo, os alunos associavam o "raciocínio matemático" ao "ato de pensar". Não estavam familiarizados com as fases inerentes ao desenvolvimento desta capacidade, porque nunca tinham trabalhado qualquer situação que a envolvesse. Através de tarefas de cunho investigativo, que visavam criar contextos de aprendizagem diversificados proporcionando cenários de investigação (Skovsmose, 2000), os alunos foram convidados a observar, formular questões e a procurar explicações. O mesmo autor evidencia o papel preponderante do professor nestes cenários através de expressões como "o que acontece se...?", "o que signfica?", "porque dizes isso?". Estas questões contribuiram, igualmente, para os alunos se envolverem no processo de investigação e assim compreenderem as etapas dos critérios de avaliação, isto é, o processo de racíocinio matemático. Da mesma forma que os alunos se envolveram nas atividades de investigação, também se empenharam na realização dos descritores da grelha de critérios de avaliação, que serviu de âncora para avaliarem o seu desempenho através dos níveis definidos.

Os alunos tinham conhecimentos prévios das temáticas abordadas, no entanto não transpunham esses conhecimentos para as tarefas de investigação, pois as atividades que são mais exploradas em contexto de sala de aula, como a resolução de exercícios e de problemas, não permitem desenvolver com tanta riqueza o raciocínio matemático. (Santos *et al.*, 2002). No desenvolvimento dessa capacidade, os alunos cruzam o raciocínio indutivo com o dedutivo, pois para uma mesma observação utilizam ambos. Numa primeira fase, recorrem ao raciocínio indutivo, através da observação e do estabelecimento de relações. Quando procuram dar significado matemático às suas conclusões, usam os conhecimentos adquiridos anteriormente, ou seja, o raciocínio dedutivo, como refere Pólya (1990).

Percorrendo as diferentes etapas estabelecidas nos critérios de avaliação, no que respeita à "relação entre objetos", esta foi a que os alunos evidenciaram em maior número nas suas produções. Isto, porque talvez estivessem mais familiarizado com o tema "Números e Operações", ao qual se dá particular destaque nos primeiros anos de escolaridade.

No que diz respeito à etapa “formula conjeturas”, houve algumas dificuldades no início do estudo, pois os alunos não atribuiam significado a este conceito, nem sabiam que trabalho deveriam efetuar. Contudo, à medida que as tarefas foram sendo realizadas, esta dificuldade foi ultrapassada. Segundo Fonseca (2000), o processo de formulação de conjeturas é aquele que surge com maior frequência e de uma forma mais espontânea. Efetivamente, depois dos alunos interiorizarem o conceito, este revelou-se o ponto forte, pois tentavam mostrar, testar casos particulares, evidenciar contraexemplos, com o entusiasmo de encontrar uma conjetura. Deste modo, a formulação de conjeturas contribuiu para a descoberta de novos caminhos que permitiram abordar uma situação de diferentes formas e ainda dinamizar a vertente investigativa dos alunos.

O “testar casos” possibilitou-lhes uma maior flexibilidade entre conceitos, assim como interações verbais entre os pares. O explicar aos outros a forma como pensavam contribuiu para uma tomada de consciência dos erros, limitações e impossibilidades patentes nas atividades desenvolvidas. Ao serem questionados pela professora ou pelos colegas, no sentido de contrariarem as suas validações, eram reorientados para novas hipóteses, potenciando desta forma diferentes estratégias (Ponte *et al*., 1998). Nesta diversidade, surgem oportunidades para uma aprendizagem mais consistente.

A etapa “validação e justificação de conjeturas” foi realizada pelos alunos de formas diferentes e era a que estava menos presente nos seus trabalhos. Todavia, os alunos tiveram oportunidade de desenvolver a linguagem natural, através das conclusões escritas que promoviam a reflexão sobre as suas ideias matemáticas, assim como a linguagem simbólica nas suas variadas representaçõs (pictórica, tabular e esquemas). Na maioria das vezes, os alunos explicam o seu pensamento ao invés de justificar a razão do porquê das situações.

Este estudo apresenta pontos comuns com a investigação de Cañadas e Castro (2007) no que refere à categorização proposta para descrever os processos envolvidos no raciocínio indutivo: (i) observação de casos particulares; (ii) organização de casos particulares; (iii) procura de padrões e regularidades; (iv) formulação de conjeturas; (v) validação das conjeturas; (vi) generalização das conjeturas; e (vii) justificação das conjeturas generalizadas. A partir da análise efetuada, o raciocínio indutivo esteve presente no trabalho dos alunos, pois partiam de casos particulares e tentavam encontrar um padrão geral. Verificou-se, também, que nem todos os alunos seguem as mesmas fases para a resolução da mesma tarefa. A justificação das conjeturas formuladas permitiu o processo de generalização de forma mais significativa. Neste processo, a linguagem algébrica esteve presente na maioria dos casos, razão pela qual as autoras consideram que as atividades de generalização são essenciais para o estudo da álgebra.

O modo como as tarefas foram apresentadas à turma seguiu o modelo proposto por Ponte *et al.* (1998), destacando-se a terceira fase "discussão/reflexão final", como um dos momentos mais significativos das aulas. A troca de ideias e a confrontação de estratégias distintas permitiu enriquecer estes momentos que foram palco de diversos aspetos: (i) o esclarecimento de dúvidas; (ii) a clarificação de aspectos menos conseguidos; (iii) a validação dos resultados; (iv) a formulação de novas conjeturas; (v) a sistematização de conclusões e conceitos fundamentais; e (vi) a autorregulação. A fase de discussão e reflexão sobre o trabalho realizado permitiu o confronto de opiniões, a justificação e a tomada de consciência dos processos seguidos, o que permitiu afirmar que a aprendizagem não resulta só da atividade, mas também da reflexão sobre a atividade (Bishop & Goffree, 1986; Ponte, 2005).

No que respeita aos critérios de avaliação, os alunos utiliziram-nos seguindo a ordem das etapas definidas e para cada uma procuravam seguir a ordem dos níveis, desde o mais elementar ao mais elaborado. Através dos diferentes descritores encontravam o modo para a progressão do trabalho a realizar. À medida que iam desenvolvendo a sua atividade, iam monitorizando os passos seguintes, o que lhes permitia fazer o ponto da situação e aferir entre o que já foi feito e o que se esperava que fizessem.

Os critérios de avaliação vieram sustentar a avaliação reguladora, uma vez que esta se desenvolveu durante o processo de ensino-aprendizagem em tempo real, onde os alunos tiveram a possibilidade de verificar o trabalho que produziram e o que era esperado que produzissem. Contribuiram, ainda, para as atividades desenvolvidas, pois os alunos ao lerem os seus descritores sabiam os passos que tinham de percorrer. Assim, construiu-se aqui uma triangulação entre a construção dos critérios de avaliação, a sua apropriação e a aprendizagem inerente às tarefas. A participação ativa dos alunos na construção dos critérios de avaliação induziu à sua apropriação (Santos & Gomes, 2006), que por seu lado possibilitou o desenvolvimento do raciocínio matemático, através do seu uso continuado e, consequentemente, favoreceu a aprendizagem das temáticas abordadas. Os alunos ao interiorizarem as etapas do processo descritas nos critérios de avaliação, provavelmente criaram um modelo que poderão utilizar em situações similares.

Todavia, os alunos revelaram ter dificuldades em comunicar com detalhe o que pensavam, isto é, o que diziam era quase sempre parcial e insuficiente para que os restantes colegas os entendessem, o que vem confirmar o evidenciado por outros estudos (Boavida *et al.*, 2008). Face a estas dificuldades, o questionamento oral da professora e o papel de mediadora foram fundamentais para trazer à consciência dos alunos aspetos que omitiam nas suas explicações e que eram importantes (Moll, 1996).

Em suma, para desenvolver a capacidade de autorregulação dos alunos em Matemática, importa que estes sejam capazes de refletir sobre o seu trabalho e que não esperem pela aprovação da professora (Santos, 2002).

Através desta experiência de aprendizagem, os alunos constataram que não existia a situação "certo ou errado", mas que o trabalho era desenvolvido na perspetiva do acrescentar algo ao que já tinha sido realizado, sempre no sentido de o aperfeiçoar.

4.2. Reflexão

Refletindo sobre o trabalho realizado, considero que este foi uma experiência enriquecedora que se revelou profícua para os alunos, para mim e para a comunidade de professores de Matemática.

Para os alunos, as tarefas de caráter investigativo propostas ajudaram a criar diferentes contextos de aprendizagem e momentos de discussão e reflexão, proporcionando o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Parecem também ter contribuído para a sua motivação, uma vez que mesmo os alunos que revelavam mais dificuldades de aprendizagem se empenharam na exploração dessas tarefas. A diversidade das tarefas favoreceu, ainda, o leque de estratégias utilizadas pelos alunos, quer para encontrar relações entre objetos matemáticos, quer para formular, testar e justificar conjeturas. Penso, também, que estas podem ter contribuído para uma aprendizagem com significado na temática da álgebra, no que respeita às generalizações, ainda que informalmente. Do mesmo modo que os alunos se empenharam na concretização das tarefas, também se empenharam na construção dos descritores dos critérios de avaliação, reconhecendo que estes eram um instrumento de trabalho que funcionava como motor para o desenrolar das suas atividades.

Para mim, este estudo possibilitou novas abordagens e cenários que culminaram num processo de aprendizagem profissional. As reflexões que fui fazendo ao longo deste trabalho sobre a minha prática revelaram-se uma mais-valia, na medida em que contribuíram para uma ampliação e aprofundamento dos meus conhecimentos sobre a natureza das tarefas a propor aos alunos, as respetivas potencialidades, as fases para orientar a sua exploração, a importância do questionamento e feedback dado aos alunos e, ainda, o contributo do uso dos critérios de avaliação que visam dotar os alunos de uma consciência informada acerca do trabalho que desenvolvem. Reconheço que o que sabia sobre a capacidade transversal "raciocínio matemático" era efetivamente menos do que eu pensava, tal como a avaliação enquanto instrumento de aprendizagem. Ainda assim, não fiquei a saber tudo, mas fico com vontade de continuar a desenvolver e aprofundar esta temática com os alunos e colegas de trabalho, pois penso que trabalhos de investigação como este são preponderantes na carreira docente.

Para a comunidade de professores de Matemática, este estudo proporciona um aprofundamento do conhecimento disponível sobre o ensino e a aprendizagem do processo de raciocínio matemático, nomeadamente no que se refere ao tipo de tarefas a propor, às suas diferentes etapas e o que se pretende que os alunos realizem nas suas produções. Este estudo deixa, também, como contributo, um instrumento de avaliação – a grelha de critérios de avaliação – que pode auxiliar a orientação do professor e a autorregulação do processo, contribuindo para a tomada de consciência dos alunos acerca do que se espera que realizem e lhes possibilite a monitorização do seu trabalho.

A maior dificuldade que senti na realização deste estudo foi a elaboração de um diário de bordo detalhado. No final de cada aula, tentei registar as observações que sobre ela considerei relevantes. Contudo, devido à fase de discussão/reflexão no final de cada tarefa e à reformulação dos descritores da grelha de critérios de avaliação, tornou-se complicado gerir as aulas como professora e analisá-las como investigadora. Desempenhar estas duas funções em simultâneo, fez com que o meu papel de investigadora passasse, por vezes, para segundo plano, podendo, eventualmente, ter deixado escapar observações pertinentes. Todavia, penso que esta limitação do estudo foi ultrapassada com o registo áudio das aulas.

Este estudo sugere que o docente se deve envolver directamente na gestão curricular, selecionando, estruturando e organizando tarefas que permitam envolver os alunos em atividades enriquecedoras. Reflete, também, que essas actividades podem ser acompanhadas pelo uso continuado de critérios de avaliação, uma vez que estes permitem que o aluno regule o seu processo de trabalho.

Considero, ainda, que existe muito trabalho a realizar no sentido de promover o desenvolvimento das três capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática. Porém, sinto que estou mais consciente do trabalho que é necessário desenvolver para potenciar estas capacidades nos alunos. Para além disso, também recolhi ao longo destes dois anos de formação, literatura e instrumentos de trabalho, que permitem dar continuidade a este processo de formação.

Desta forma, parece-me importante que estudos como este sejam realizados e divulgados junto da comunidade dos professores de Matemática, para que possam enriquecer a sua formação e, assim, melhorar as suas práticas. É, igualmente, relevante que na formação contínua de professores exista um lugar privilegiado para atividades que possibilitem o trabalho colaborativo, apoiado na troca de experiências e na reflexão sobre as práticas, tendo por base o desenvolvimento das capacidades transversais e a avaliação dessas capacidades numa perspetiva reguladora.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Allal, L. (2007). Régulations des apprentissages: orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. In L. Allal; L. Mottier López (Dir.). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (pp. 7-23). Bruxelles: De Boeck Université.

Allal, L. (1999). Impliquer l'apprenant dans le processus d'évaluation: promesses et pièges de l'autoévaluation. In C. Depover; B. Nöel (Eds.). *L'évaluation des compétences et des processus cognitifs. Modèles, pratiques et contextes* (pp. 35-56). Bruxelles: De Boeck Université.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bell, J. (1997). Como realizar um projeto de investigação. Lisboa: Gradiva.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994) Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: SPCE.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35-49.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1(2*), 67-78.

Crahay, M. (2007). Feedback de l'enseignant et apprentissages des élèves: revue critique de la littérature de recherché. In L. Allal; L. Mottier López (Dir.). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (pp. 45-70). Bruxelles: De Boeck Université.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education* (pp. 243-307). Doedrecht: D. Reidel.

DEB (2001). Reorganização curricular do ensino básico: Princípios medidas e implicações. Lisboa: ME.

DGIDC (2010). Metas de Aprendizagem para o Ensino Básico. (Retirado de http//www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt, em 28 de dezembro de 2011).

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino Secundário. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas.* (Tese de mestrado,Universidade de Lisboa)

Doly, A. M. (1999). Metacognição e mediação na escola. In M. Grangeat (Coord.). *A Metacognição, um Apoio ao Trabalho dos Alunos* (pp. 17-59). Porto: Porto Editora.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 22-36). Reston, VA: NCTM.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas Políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Ferreira, C. A. (2007). *Avaliação no Quotidiano da Sala de Aula*. Porto: Porto Editora

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 1-3.

Figari, G. (1996). *Avaliar: Que Referencial?* Porto: Porto Editora.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gomes, A. (2006). *Auto-avaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores de Matemática* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Jorro, A. (2000). *L´enseignant et l´évaluation. Des gestes évaluatifs en question*. Bruxelles: De Boeck Université.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Leite, C. (1993). Um olhar curricular sobre a avaliação. In C. Leite (Org.). *Avaliar a Avaliação* (pp. 7-23). Porto: Edições Asa.

Lüdke, M. & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2007), *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação – DGEBS (1991).Organização Curricular e Programas, (2.º Ciclo do Ensino Básico). Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Moll, L. C. (1996). *Vygotsky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica*. Porto Alegre: Artes Médicas.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM (Trabalho original em inglês, publicado em 2000).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. In Santos, L. (2005a). Ensinar e avaliar competências em Matemática: que desafios? (Retirado de htpp/www.area.fc.ul.pt em 23 de fevereiro de 2012)

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1995)

Nunes, C. (2004). *Avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática , 100*, 3-9.

Oliveira, P., (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica.* (Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa)

Paula, I. (2005). Utilização de portefólios como processo integrador da aprendizagem e da avaliação em matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Pacheco, J. A. (1996). *Currículo: Teoria e praxis*. Porto: Porto Editora.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I – Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. (Trabalho original em Inglês publicado em 1954)

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nasinvestigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7* (2),41-70.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade aberta.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Russel,S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (pp. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, L. (2002*). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?* In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas (pp.75-84).Lisboa:ME-DEB (Retirado em 27 de dezembro de 2011 de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/avaliacao.htm).

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: APM.

Santos, L. & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, *40* (3), 11-48.

Santos, L. & Pinto, J. (2009) *Auto-avaliação Regulada em Matemática: dizer antes de fazer.*Bolema,33, 51-68. (Retirado de repositorio.ul.pt/handle/10451/2810, em 15 de fevereiro de 2012.

Semana, S. (2008). *Os relatórios escritos como instrumentos de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8.º ano de escolaridade em Matemática*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Silva, A. L. (2004). *A auto-regulação na aprendizagem.* In A. L. Silva; A. M. Duarte; I.Sá & A. M. V. Simão (Ed.) Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante (pp.17-39). Porto: Porto Editora.

Scriven, M. (1981). *Evaluation Thesaurus* (third edition). Inverness, California: Edgepress.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain* (pp. 524-548). Dordrecht, Kluwer.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Steen, L Twenty questions about mathematical reasoning. In: Stiff, L., Curcio F. (Eds). Developing mathematical reasoning in grades K-12 (pp.270-288). Reston, VA: NCTM, 1999.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). *Tarefas matemáticas como um quadro para reflexão: Da investigação à prática* [traduzido de Mathematics Teaching in the Middle School, 3 (4), 268-275].

Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 37-44). Reston, VA: NCTM.

Veiga Simão, A.M. (2005). Reforçar o Valor Regulador, Formativo e Formador da Avaliação das Aprendizagens. *Revista de Estudos Curriculares*, *3* (2), 265-289.

Yackel, E. Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, *et.al.* (Eds.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E. Hanna, G. Reasoning and proof.Kilpatrick, J. *et al.* (Eds), A research companion to Principles and Standards for school Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2003, pp. 227-236. In Santos, L. & Pinto, J. (2009) Auto-avaliação Regulada em Matemática: dizer antes de fazer. Bolema, 33, 51-68.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, California: Sage.

Yin, R.K. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Referências Legislativas

Despacho Normativo n.º 1/2005.*Diário da República*, 3, I Série B, 71-76.

ANEXOS

Anexo I

Avaliação do raciocínio matemático: possíveis critérios e descritores

Critérios	Indicadores	Descritores Nível 1	Descritores Nível 2	Descritores Nível 3
Apropriação (relativo à compreensão da situação)	Cria/usa casos	Não cria/usa ou cria/usa casos não adequados	Cria/usa casos adequados	Cria/usa casos poderosos (adequados e sistemáticos)
	Formula conjeturas	Não formula conjeturas	Formula conjetura local	Formula conjetura geral
Eficiência (relativo ao processo-estratégia)	Testa a validade das conjeturas	Não testa a validade das conjeturas	Testa com estratégia adequada (mostra contraexemplos, é exaustivo, …)	Justifica a validade/não validade da conjetura (com exemplo generalizável, faz dedução, …)
Eficácia (relativo ao produto-solução)	Correção e completude da validade das conjeturas	Não apresenta ou apresenta de forma incorreta	Apresenta a validade das conjeturas parcialmente justificadas	Apresenta a validade das conjeturas robustamente justificada

Comissão de Acompanhamento do Plano de Matemática (PM) II
e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB),
Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC)

Anexo II

Disciplinas onde se registam maiores dificuldades na turma

(Reunião de Conselho de Turma, Novembro de 2011)

Alunos	**LP**	**ING**	**HGP**	**MAT**	**CN**	**EVT**	**EM**	**EF**	**EA**	**FC**
A	x			x						
B	x	x	x	x	x					
C	x		x	x			x			
D	x			x						
E										
F	x			x						
G										
H	x	x		x						
I										
J	x	x	x	x						
L	x	x	x	x						
M										
N	x	x	x	x						
O	x			x						
P										
Q	x			x						
R	x	x	x	x	x					
S	x			x						
T	x	x	x	x	x	x				
U										
V	x	x	x	x	x					
X	x	x	x	x	x	x				

Anexo III

Dificuldades académicas da turma

(Reunião de Conselho de Turma, Novembro de 2011)

Alunos	Leitura	Compreensão Oral	Expressão Oral	Compreensão Escrita	Expressão Escrita	Resolução de problemas	Técnicas de Cálculo	Aplicação de Conhecimentos	Ausência de Pré-requisitos
A				x	x	x	x	x	
B	x	x	x	x	x	x	x	x	
C	x	x	x	x	x	x			
D									
E									
F	x	x	x	x	x	x	x	x	
G									
H			x	x	x	x	x		
I									
J	x	x	x	x	x	x	x	x	x
L		x	x	x	x	x	x	x	x
M									
N	x	x	x	x	x	x	x	x	x
O						x	x		
P									
Q						x	x		
R	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S									
T	x	x	x	x	x	x	x	x	x
U									
V	x	x	x	x	x	x	x	x	x
X	x	x	x	x	x	x	x	x	x

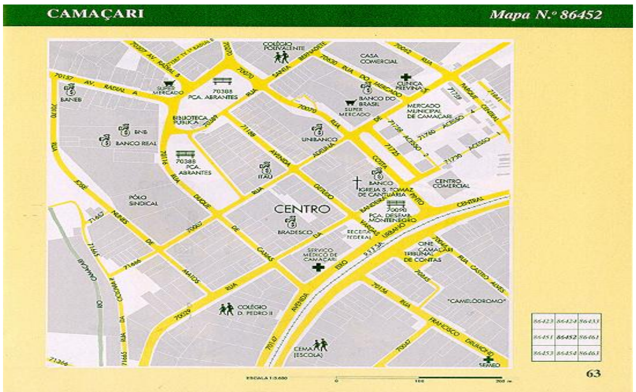
Anexo IV

Guião da entrevista individual aos alunos

Na pergunta 1 procuro compreender o significado que os alunos atribuem à Matemática no seu quotidiano.

Na pergunta 2 pretendo inferir qual a ideia que os alunos associam ao raciocínio matemático.

1. Observa as imagens.

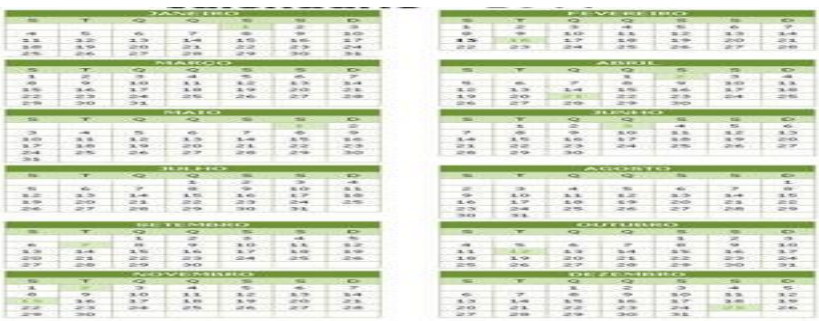


Mapa da cidade

Relógio de parede

Edifício construído sob um lago

Supermercado



Calendário

1.1 Quais as imagens que te parecem estar relacionadas com a Matemática? Porquê?

1.2 Dá um exemplo de algo que tenhas em tua casa que se relacione com a Matemática.

1.3 Consideras que a Matemática é importante para o teu dia-a-dia? Porquê?

1.4 Tens na família alguém que na sua profissão aplique a Matemática?

1.5 Dá exemplos do que mais gostas numa aula de Matemática. Porquê?

1.6 Dá exemplos do que menos gostas numa aula de Matemática. Porquê?

1.7 Indica 5 palavras que associes à Matemática.

2. Do conjunto de palavras escolhe cinco que achas que se relacionam com a matemática. Porquê?

tabela juros igualdade composição

regra ciência euro

escrita

esquema

resolução de problemas

valor meteorologia

temperatura

raciocínio comunicação

Anexo V

Tarefa 1 – Explora a tabuada do onze

1. Constrói a tabuada do 11.

2. Prolonga a tabuada calculando 11x11, 11x12, 11x13... e formula algumas conjeturas.

3. Escreve todas as tuas conclusões e procura justificá-las.

In MATEMÁTICA PARA TODOS, investigações na sala de aula,
“Números e Regularidades – Propostas de trabalho”,
Projecto “Explorar e Investigar para Aprender Matemática”,
Associação de Professores de Matemática

Anexo VI

Tarefa 2 – Exploração com números

Tenta descobrir relações entre os seguintes números.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
…	…	…	…

Faz um registo das conclusões a que fores chegando.

In MATEMÁTICA PARA TODOS, investigações na sala de aula,
"Números e Regularidades – Propostas de trabalho",
Projecto "Explorar e Investigar para Aprender Matemática",
Associação de Professores de Matemática

Anexo VII

Tarefa 3 – Vamos pensar

1. Observa atentamente a seguinte sequência de figuras.

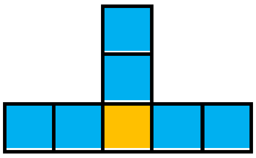


Figura 2

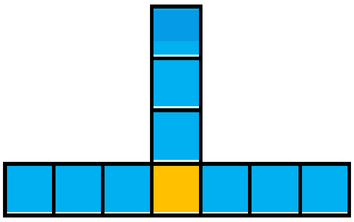


Figura 3

1.1. Desenha a 1ª figura da sequência.

1.2. Desenha a 5ª figura da sequência.

1.3. Explica como descobriste o número de quadrados da 1ª e da 5ª figura.

1.4. Explica como se calcula o número de quadrados de qualquer figura da sequência.

1.5. Formula algumas conjeturas.

1.6. Descobre o termo geral da sequência.

Utiliza esquemas ou uma tabela para te ajudar.

Adaptada da oficina de formação

“Reajustamento do Programa de Matemática –

– Que mudanças? Que desafios?” (2010)

Anexo VIII

Tarefa 4 – A cerca do Faísca

O dono do Faísca tem 40 m de rede para construir uma cerca rectangular para o seu cão. Quais deverão ser as dimensões da cerca para que ele tenha o maior espaço para correr?

Adaptada de Geometria no Programa de Matemática do Ensino Básico,

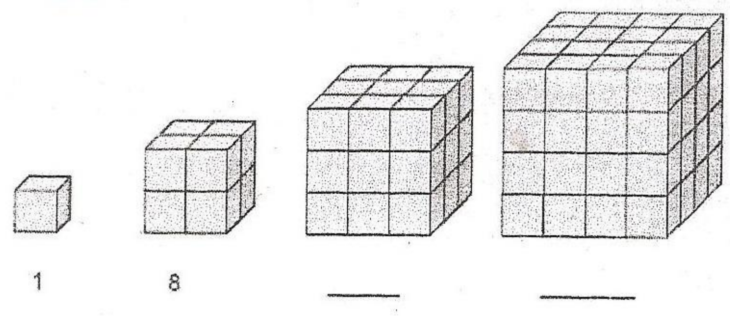
Direccção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC)

Anexo IX

Tarefa 5 – Investigando cubos

1. Observa a seguinte sequência de cubos, constituídos por cubos mais pequenos de iguais dimensões.

1.1. Completa a sequência com o número de cubinhos que existe em cada cubo.



1.2. Indica quantos cubinhos são necessários para formar a 5ª figura.

1.3. Investiga, para uma figura da sequência à tua escolha, quantos cubinhos serão necessários para a formar. Explica como obtiveste esses resultados.

2. Como sabes, um cubo com 1 cm de aresta tem um volume igual a 1 cm^3. Supõe que os cubos da sequência anterior são formados por cubinhos de 1 cm de aresta e preenche a tabela.

Aresta (cm)	**Volume (cm^3)**
1	
2	
3	
4	

2.1. Sem contares o número de cubinhos, refere como é possível descobrir o volume de cada cubo.

3. Faz uma extensão da tarefa, investigando outras relações que possas encontrar e procura curiosidades.

Adaptada de Geometria no Programa de Matemática do Ensino Básico,

Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC)

Anexo X

Exma. Senhora

Diretora da Escola

Eu, Mª Emília Montenegro Beirão, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, na turma 6ª do 6º ano desta escola, o projeto de investigação "O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º ciclo do ensino básico". Este projeto integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e tem como objectivo compreender os processos usados por alunos do segundo ciclo em tarefas de exploração, com recurso a critérios de avaliação.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: (i) diário de bordo, (ii) entrevistas aos alunos objecto de caso e (iii) trabalhos produzidos pelos alunos, sendo que alguns momentos desta recolha serão áudio-gravados.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação e será salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Atenciosamente,

Lisboa, 26 de Setembro de 2011

Pede deferimento,

____

(Mª Emília Beirão)

Anexo XI

Exma. Senhora
Coordenadora do Grupo
Disciplinar
de Matemática

Eu, Mª Emília Montenegro Beirão, venho por este meio comunicar a minha intenção de concretizar, na turma 6ª do 6º ano desta escola, o projeto de investigação "O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º ciclo do ensino básico". Este projeto integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e tem como objectivo compreender os processos usados por alunos do segundo ciclo em tarefas de exploração, com recurso a critérios de avaliação.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: (i) diário de bordo, (ii) entrevistas aos alunos objecto de caso e (iii) trabalhos produzidos pelos alunos, sendo que alguns momentos desta recolha serão áudio-gravados.

Informo, ainda, que foi solicitada autorização ao Director da Escola e será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação, sendo salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Atenciosamente,

Lisboa, 26 de Setembro de 2011

A Professora,

____

(Mª Emília Beirão)

Anexo XII

Exmo. Senhor

Encarregado de Educação

Eu, Mª Emília Beirão, professora de Matemática na turma 6ª do 6º ano, venho por este meio solicitar autorização para a participação/colaboração do seu educando no projeto de investigação "O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º ciclo do ensino básico" Este projeto integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e tem como objectivo compreender os processos usados por alunos do segundo ciclo em tarefas de exploração, com recurso a critérios de avaliação.

As principais formas de recolha de dados para a concretização do projeto serão: (i) diário de bordo, (ii) entrevistas aos alunos objecto de caso e (iii) trabalhos produzidos pelos alunos, sendo que alguns momentos desta recolha serão áudio-gravados.

Para a concretização do projeto serão utilizados alguns trabalhos produzidos pelos alunos autorizados e entrevistas a alguns desses alunos, sendo que alguns momentos serão áudio-gravados.

Solicito o preenchimento da declaração em anexo e informo, ainda, que em todo o processo será salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Atenciosamente,

Lisboa, 26 de Setembro de 2011

A Professora de Matemática,

____

(Mª Emília Beirão)

Anexo XIII

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, nº ____, da turma ___ do ____ ano, declaro que tomei conhecimento dos objetivos do projeto de investigação "O desenvolvimento do raciocínio matemático apoiado pelo uso continuado de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 2.º ciclo do ensino básico" e da necessidade de alguns momentos da recolha de dados serem áudio-gravados.

Assim, ____________________________ (autorizo / não autorizo) a participação do meu educando, com a salvaguarda do respectivo anonimato.

Lisboa, ___ de ____________ de 2011

O Encarregado de Educação,

____

Anexo XIV

Guião do diário de bordo

Aula: ______ Data:________________

Tarefa proposta

Observações a registar (atitudes dos alunos, questões colocadas, estratégias seguidas, intervenções mais significativas dos alunos, ações da professora)

– Na apresentação da tarefa

– Durante a realização da tarefa

– Na discussão

– Outras observações

Anexo XV

Guião da entrevista aos alunos sobre os critérios de avaliação

Guião de entrevista para compreender como os alunos utilizaram a grelha de critérios de avaliação no decurso das tarefas de investigação propostas pela professora.
As entrevistas foram realizadas aos três alunos objetos de caso, individualmente, para assim conseguir dar resposta às questões do estudo.

1. Na realização das tarefas utilizaram a grelha? Porquê?

    1.1. Caso a tenham usado, em que fase o fizeram? No início, no desenvolvimento ou no final das tarefas?

2. Consideras a grelha um instrumento de trabalho adequado a tarefas de investigação? Porquê?

3. A grelha contribui para o prolongamento das tarefas? Porquê?

4. Tiveram a preocupação de verificar a que nível correspondia o vosso trabalho?

5. A grelha é motivadora no sentido de ajudar a desenvolver o raciocínio matemático?

6. Que dificuldades encontraste nas tarefas de investigação que realizaste?